

О.С. Істер

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

ВПРАВИ
САМОСТІЙНІ РОБОТИ
ТЕМАТИЧНІ КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Рівень стандарту

Академічний рівень

Видання друге, доповнене



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 512.1(075.3)
ББК 22.1я72
189

189 **Істер О.С.**
Алгебра і почтаки аналізу. 10 клас: Вправи. Самостійні роботи. Тематичні контрольні роботи. Вид. 2-е, доповн. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 240 с.

ISBN 978-966-10-1856-2

У посібнику запропонована повна добірка матеріалів з алгебри і початків аналізу для 10-го класу відповідно до шкільної програми рівня стандарту та академічного рівня: вправи, рівневі самостійні роботи і тематичні контрольні роботи. До більшості вправ подано відповіді та вказівки.

Посібник призначений для вчителів, методистів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 512.1(075.3)
ББК 22.1я72

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-1856-2

© Навчальна книга – Богдан,
майнові права, 2011

ПЕРЕДМОВА

Посібник містить дидактичні матеріали з курсу алгебри 10-го класу **рівня стандарту** та **академічного рівня**: 1000 вправ; диференційовані за складністю самостійні роботи (9 робіт рівня стандарту та 10 — академічного рівня); 5 тематичних контрольних робіт рівня стандарту та 6 тематичних контрольних робіт академічного рівня, кожна з яких подана у двох рівноцінних варіантах.

Назви розділів та пунктів посібника відповідають назвам тем програми, тому посібник легко адаптується до діючих підручників. Для зручності користування посібником у назві кожної самостійної роботи та тематичної контрольної роботи відбито їхню тематику. В кінці посібника наведено відповіді та вказівки до абсолютної більшості вправ. До самостійних та тематичних контрольних робіт відповіді відсутні. Тому вчитель, придбавши посібник на весь клас (або один примірник на парту), може використовувати його під час будь-якого уроку (закріплення нових знань, перевірки знань тощо).

Нижче розглянемо деякі особливості посібника та роботи з ним.

1. Вправи. Посібник містить вправи для класних і домашніх робіт. Вправи, рекомендовані для домашнього виконання, відзначені (номери вправ подані на темному фоні). Задачі, позначені кружечком (°), відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень; задачі без цієї позначки — достатньому та високому рівням навчальних досягнень. Достатня кількість дасть змогу вчителю використовувати посібник практично на кожному уроці та давати по ньому домашні завдання.

2. Самостійні роботи. У посібнику подано добірку диференційованих за складністю самостійних робіт. Використано позначення: С(ст) — для самостійних робіт рівня стандарту та С(ак) — для самостійних робіт академічного рівня з відповідним номером. Після номера вказано одну з літер А, Б або В (наприклад, С(ак)–2Б) відповідно до рівня складності цієї роботи:

А — самостійна робота, що відповідає початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

Б — самостійна робота, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

В — самостійна робота, що відповідає високому рівню навчальних досягнень.

Для кожного рівня подано два рівноцінні варіанти. Кожна самостійна робота містить 3 завдання і розрахована на 15–30 хв (залежно від теми). Самостійні роботи мають, як правило, навчальний характер і не призначені для оцінювання знань учнів. Якщо вчитель захоче оцінити роботу, то кожне завдання рівня А автор пропонує оцінювати в 2 бали, рівня Б — у 3 бали, рівня В — в 4 бали. Таким чином, максимальна оцінка за роботу рівня А — 6 балів, рівня Б — 9 балів, рівня В — 12 балів. Під час оцінювання кожного завдання вчитель може застосовувати систему, що подана нижче (для оцінювання тематичної контрольної роботи). Рівень самостійної роботи, що виконує учень, як правило, визначає вчитель.

3. Тематичні контрольні роботи (надалі — ТКР). Використано позначення: ТКР(ст) — для тематичних контрольних робіт рівня стандарту та ТКР(ак) — для тематичних контрольних робіт академічного рівня з відповідним номером. Кожна ТКР містить як завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень (вони позначені кружечками), так і завдання, що відповідають достатньому та високому рівням навчальних досягнень. Усі завдання оцінено в балах таким чином, що максимально оцінка за ТКР дорівнює 12 балам. Кожна ТКР розрахована на один урок. Звичайно, вчитель може збільшити або зменшити як кількість ТКР, так і кількість завдань у кожній ТКР, змінивши при цьому оцінювання в балах таким чином, щоб сума балів дорівнювала 12.

Автор пропонує на першому етапі вести оцінювання кожного завдання у звичній для вчителя математики системі «плюс-мінус»:

«+» (плюс) — учень повністю розв'язав вправу;

«±» (плюс-мінус) — хід розв'язування вправи правильний, але допущено помилки логічного або обчислювального характеру, які привели до неправильної відповіді;

«-» (мінус-плюс) — завдання не закінчено, але учень суттєво наблизився до повного розв'язання, виконавши не менше його половини;

«-» (мінус) — учень почав розв'язувати правильно (наприклад, зробив малюнок, записав фрагмент розв'язання), але виконав завдання менше ніж наполовину;

«0» (нуль) — учень не починав завдання або почав неправильно.

На другому етапі вчитель переводить оцінку із системи «плюс-мінус» у бали. Пропонується наступна шкала.

Максимальний бал за завдання	Оцінки в системі «плюс-мінус».			
	Переведення в бали			
	+	±	-	—
1	1	0,5	0,5	0
2	2	1,5	1	0,5
3	3	2–2,5	1–1,5	0,5
4	4	3	2	1

Природним є те, що оцінкою роботи є сума балів, отримана учнем за виконання кожного завдання окремо. Якщо сумою є неціле число (а саме — це число має п'ять десятих), то користуємося звичним правилом округлення (наприклад, 9,5 \approx 10).

850. Перевірте, чи:

- 1) $\sin 87^\circ + \sin 61^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ = \sin 1^\circ$;
- 2) $\cos 115^\circ + \cos 25^\circ + \cos 65^\circ - \cos 35^\circ = \sin 5^\circ$.

851. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha + 2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + 2 \sin 2\alpha}; \quad 2) \frac{2 \sin^2 3\alpha + \cos 5\alpha - 1}{2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha - \sin 5\alpha}.$$

852. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha - 2 \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha + 2 \cos 3\alpha}; \quad 2) \frac{2 \cos^2 2\alpha + \cos 5\alpha - 1}{\sin 5\alpha + 2 \cos 2\alpha \sin 2\alpha}.$$

853. Спростіть вираз:

$$1) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta);$$

$$2) \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - \alpha\right).$$

854. Спростіть вираз:

$$1) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta);$$

$$2) \sin^2\left(\frac{7\pi}{12} - x\right) - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12} - x\right).$$

855. Доведіть тотожність:

$$1) 1 + \sin \alpha - \cos \alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$2) 1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha};$$

$$3) \left(\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 4\alpha}{\cos \alpha}\right) \left(\frac{1}{\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}\right) = 4 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$4) \frac{(\sin \alpha + \sin 3\alpha)(\cos \alpha - \cos 3\alpha)}{1 - \cos 4\alpha} = \sin 2\alpha.$$

856. Доведіть тотожність:

$$1) 1 - \sin \alpha - \cos \alpha = -2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$2) 1 - \sin \alpha + \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha};$$

$$3) \left(\frac{\cos 4\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 4\alpha}{\cos \alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos 3\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}\right) = 4 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$4) \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\cos 3\alpha + \cos \alpha)}{1 + \cos 4\alpha} = \sin 2\alpha.$$

857. Подайте у вигляді добутку:

$$1) \sin 2\alpha - 2 \sin \frac{2\pi}{3} \sin 5\alpha + \sin 8\alpha;$$

$$2) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2.$$

858. Подайте у вигляді добутку:

$$1) \cos 4\alpha + 2 \cos \frac{7\pi}{4} \sin 7\alpha - \cos 10\alpha;$$

$$2) (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2.$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

859. Перетворіть добуток у суму:

$$1) \sin 3\alpha \sin 6\alpha; \quad 2) \cos 2\alpha \cos \alpha; \quad 3) \sin 4\alpha \cos \alpha;$$

$$4) \sin 11^\circ \cos 41^\circ; \quad 5) \sin 20^\circ \sin 10^\circ; \quad 6) \cos 32^\circ \cos 8^\circ.$$

860. Перетворіть добуток у суму:

$$1) \sin 2\alpha \sin \alpha; \quad 2) \cos 5\alpha \cos 3\alpha; \quad 3) \sin 4\alpha \cos 2\alpha;$$

$$4) \cos 25^\circ \cos 15^\circ; \quad 5) \sin 12^\circ \cos 8^\circ; \quad 6) \sin 26^\circ \sin 8^\circ.$$

861. Обчисліть:

$$1) \cos 15^\circ \sin 105^\circ; \quad 2) \sin 15^\circ \sin 75^\circ; \quad 3) \cos 75^\circ \cos 165^\circ.$$

862. Доведіть, що:

$$1) \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{7} - 2\alpha\right) = \frac{1}{2} \cos\left(4\alpha - \frac{9\pi}{14}\right);$$

$$2) 8 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 2 - 8 \cos^2 \alpha.$$

863. Доведіть, що:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{10} - 3\alpha\right) \sin\left(3\alpha - \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(6\alpha - \frac{7\pi}{10}\right);$$

$$2) 6 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 6 \cos^2 \alpha - 3.$$

- Використати формулу $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$; 3) якщо $m < \frac{1}{4}$ або $m > 1$, розв'язків немає; якщо $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$, то $x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8m-5}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 4) якщо $m = -6$, то $x = 2\pi k$, $k \in Z$; якщо $m = -\frac{2}{5}$, то $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; якщо $-6 < m < -\frac{2}{5}$, то $x = \pm \arccos \left(1 - \sqrt{\frac{m+6}{1-m}} \right) + 2\pi l$, $l \in Z$; якщо $m < -6$ або $m > -\frac{2}{5}$, то рівняння не має розв'язків. **971.** 2) Якщо $a < -1$ або $a > 3$, то $x = \pi k$, $k \in Z$; якщо $-1 \leq a \leq 3$, то $x_1 = \pi k$, $k \in Z$; $x_2 = \pi n \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-1}{2}$, $n \in Z$. **972.** $b = -2$ або $b = 2$.
- 973.** 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;
 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;
 5) $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 6) $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$;
 7) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in Z$; 8) $\pi k < x \leq \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.
- 975.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{7\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;
 3) $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $\pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **992.** 1) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right)$,
 $n \in Z$. *Вказівка.* $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$; 2) $\left[-\frac{7\pi}{3} + 4\pi n; \pi + 4\pi n \right]$, $n \in Z$.
- 993.** 1) $\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \right]$, $n \in Z$; 2) $\left[-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n \right]$, $n \in Z$.
- 996.** 1) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right)$, $k \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} - 2\pi k \right)$,
 $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} - 2\pi k \right)$, $k \in Z$; 3) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} - \pi k \right)$, $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} - \pi n \right)$, $k \in Z$, $n \in Z$;
 4) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi n \right)$, $n \in Z$; 5) $\left(\frac{7}{6} + 2k; \frac{1}{6} + 2k \right)$, $\left(\frac{5}{6} + 2k; -\frac{1}{6} + 2k \right)$, $k \in Z$;
 6) $\left(\frac{3\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n \right)$, $n \in Z$; 7) $\left(2\pi + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$,
 $\left((-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + \frac{3\pi}{2} + \pi k; (-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + \pi k \right)$, $k \in Z$; 8) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{12} - \pi k \right)$,

- $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{7\pi}{12} - \pi k \right)$, $k \in Z$. **998.** 1) $\left(\pm \frac{\pi}{3} + \pi(k+n); \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k-n) \right)$, $k \in Z$, $n \in Z$.
Вказівка. Додати та відняти рівняння системи;
 2) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(k-m); \frac{\pi}{3} + \pi(k+m) \right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k-m); \frac{2\pi}{3} + \pi(k+m) \right)$, $k \in Z$, $m \in Z$.
- 999.** 1) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right)$, $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right)$, $k \in Z$, $n \in Z$;
 2) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + \pi n \right)$, $k \in Z$, $n \in Z$.

ЗМІСТ

Передмова	3
Передмова до другого видання	6
Розподіл вправ рівня стандарт	7
Розподіл вправ академічного рівня	8
Вправи	10
Множини. Операції над множинами	10
Числові множини. Множини дійсних чисел	13
Дійсні числа та обчислення	14
Відсоткові розрахунки	17
Числові функції. Способи задання функцій. Область визначення і область (множина) значення функції	19
Нулі функції. Проміжки знакосталості функції. Проміжки зростання, спадання, сталості функції. Найбільше та найменше значення функції	23
Парність і непарність функції	25
Графік функції. Властивості і графіки основних видів функцій	28
Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій	29
Неперервність функції	30
Обернена функція	31
Рівносильні перетворення рівняння. Рівняння-наслідки	32
Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь	34
Рівносильні перетворення нерівностей	35
Метод інтервалів	36
Рівняння, що містять модуль	39
Нерівності, що містять знак модуля	40
Рівняння з параметрами	41
Нерівності з параметрами	41
Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня	42
Властивості арифметичного кореня n -го степеня. Перетворення коренів. Дії над коренями	46
Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік	53
Ірраціональні рівняння	55
Системи ірраціональних рівнянь	58
Ірраціональні нерівності	60
Степінь з раціональним показником	61
Властивості степеня з раціональним показником	64
Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником	68
Степеневі функції, їхні властивості та графіки	72

Синус, косинус, тангенс, котангенс кута	73
Радіанне вимірювання кутів	76
Тригонометричні функції числового аргументу	78
Властивості тригонометричних функцій	81
Періодичність тригонометричних функцій	84
Парність тригонометричних функцій	85
Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу	87
Формули зведення	93
Властивості та графіки тригонометричних функцій	97
Гармонічні коливання	100
Формули додавання	101
Формули подвійного кута	106
Формули пониження степеня. Формули половинного кута	111
Формули тангенса і котангенса половинного аргументу	113
Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток	114
Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	119
Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки	120
Найпростіші тригонометричні рівняння	125
Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь	130
Найпростіші тригонометричні нерівності	135
Основні способи розв'язування тригонометричних нерівностей	136
Основні способи розв'язування систем, що містять тригонометричні рівняння	138
Самостійні роботи	140
Рівень стандарту	140
Академічний рівень	162
Тематичні контрольні роботи	186
Рівень стандарту	186
Академічний рівень	196
Відповіді та вказівки до вправ	208



Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

ВПРАВИ
САМОСТІЙНІ РОБОТИ
ТЕМАТИЧНІ КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Рівень стандарту
Академічний рівень

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Володимир Басалига*

Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 19.08.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 13,95. Умовн. фарбо-відб. 13,95.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга — Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга — Богдан, а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70
publishing@budny.te.ua
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1856-2



9 789661 018562