

Шановні учні!

Цьогоріч ви продовжите вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам'ятати.

Зверніть увагу й на умовні позначення:



– треба запам'ятати;



– вправи для повторення;



– запитання і завдання до вивченого матеріалу;



– рубрика «Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»;

1 – завдання для класної роботи; **2** – для домашньої роботи;



– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і позначено так:



– вправи початкового рівня;



– вправи середнього рівня;



– вправи достатнього рівня;



– вправи високого рівня.

Позначкою  виокремлено вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи» та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Пригадати раніше вивчені теми допоможуть «Відомості з курсу математики 5–6 класів та курсу алгебри 7 класу», а перевірити свої знання на початку навчального року – «Вправи на повторення курсу алгебри 7 класу» в кінці підручника.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу у школі його обов'язково треба опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії розвитку та становлення математики як науки ви знайдете у рубриці «А ще раніше...»

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках і позаурочних заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня диференціації навчання тощо.

«Вправи на повторення курсу алгебри 7 класу» допоможуть діагностувати вміння й навички учнів з алгебри за попередній рік та повторити навчальний матеріал. Додаткові вправи рубрики «Завдання для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо. Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року. Задачі підвищеної складності та «Цікаві задачі для учнів неледачих» допоможуть задовольнити підвищену цікавість учнів до предмета і сприятимуть їх підготовці до різноманітних математичних змагань.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків з алгебри, необхідно запропонувати їй за підручником удома самостійно опрацювати матеріал цих уроків. Спочатку учень має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та містить значну кількість зразків розв'язування вправ, а потім із запропонованих у відповідному тематичному параграфі завдань розв'язати посильні їй вправи.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 8 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.



Розділ 1

Раціональні вирази

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** основну властивість звичайного дробу та основні властивості рівнянь;
- **ознайомитеся** з поняттями раціонального виразу, раціонального дробу, раціонального рівняння; з функцією $y = \frac{k}{x}$, степенем із цілим показником, стандартним виглядом числа;
- **навчитися** скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; виконувати арифметичні дії з раціональними дробами; розв'язувати раціональні рівняння.

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

У курсі алгебри 7 класу ви вже знайомилися із **цілими раціональними виразами**, тобто з виразами, що не містять ділення на вираз зі змінною, наприклад:

$$5t^2p; \quad 4c^3 + t^9; \quad (m - n)(m^2 + n^7); \quad k^9 - \frac{p + l}{4}.$$

Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, наприклад:

$$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$$

$$k^9 - \frac{p + l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$$

На відміну від цілих виразів, вирази

$$5m - \frac{3}{p}; \quad \frac{x + 2}{y - 9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}; \quad \frac{1}{(x - y)(x^2 + 7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають **дробовими раціональними виразами**.

Цілі раціональні і дробові раціональні вирази називають **раціональними виразами**.



Раціональні вирази – це математичні вирази, які містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня із цілим показником.

Раціональний вираз вигляду $\frac{P}{Q}$, де P і Q – вирази, що містять числа або змінні, називають **дробом**. Вираз P є його чисельником, а Q – знаменником.

Якщо чисельник і знаменник дробу – многочлени, то дріб називають **раціональним дробом**.

Цілий раціональний вираз має зміст при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять, оскільки для знаходження його значення треба виконати дії додавання, віднімання і множення та ділення на число, відмінне від нуля, що завжди можливо.

Розглянемо дробовий раціональний вираз $\frac{5}{x-3}$. Його значення можна знайти для будь-якого значення x , крім $x = 3$, оскільки при $x = 3$ знаменник дробу дорівнюватиме нулю. У такому випадку кажуть, що вираз $\frac{5}{x-3}$ має зміст при всіх значеннях змінної x , крім $x = 3$ (або при $x = 3$ не має змісту).



Значення змінних, при яких вираз має зміст, називають допустимими значеннями змінних у виразі.

Ці значення утворюють **область визначення виразу**, або **область допустимих значень змінних у виразі**.

Приклад 1. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) \frac{m-3}{9}; \quad 2) \frac{5}{p+2}; \quad 3) \frac{x+7}{x(x-9)}; \quad 4) \frac{7}{|y|-3}.$$

Розв'язання. 1) Вираз має зміст при будь-яких значеннях змінної m . 2) Допустимі значення змінної p – усі числа, крім числа -2 , оскільки це значення змінної перетворює знаменник дробу на нуль. 3) Знаменник дробу $\frac{x+7}{x(x-9)}$ перетворюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x – усі числа, крім чисел 0 і 9 . 4) Допустимі значення змінної y – усі числа, крім 3 і -3 .

Скорочено *відповіді* можна записати так: 1) m – будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

Розглянемо умову рівності дробу нулю. Оскільки $\frac{0}{Q} = 0$, якщо $Q \neq 0$, то можна прийти до висновку, що дріб $\frac{P}{Q}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник P дорівнює

нулю, а знаменник Q не дорівнює нулю, тобто $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Приклад 2. При яких значеннях змінної дорівнює нулю значення дробу:

$$1) \frac{x-3}{x+1}; \quad 2) \frac{(a-2)(a+1)}{a+5}; \quad 3) \frac{b(b-7)}{b-7}?$$

Розв'язання. 1) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = 3$. Це значення змінної не перетворює знаменник на нуль, тому $x = 3$ є тим значенням змінної, при якому даний дріб дорівнює нулю. 2) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $a = 2$ або $a = -1$. При кожному із цих значень знаменник дробу нулю не дорівнює. Тому $a = 2$ і $a = -1$ є тими значеннями змінної, при яких даний дріб дорівнює нулю. 3) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $b = 0$ або $b = 7$. Якщо $b = 0$, знаменник дробу нулю не дорівнює, а якщо $b = 7$, знаменник дробу перетворюється на нуль, тобто дріб не існує. Отже, даний дріб дорівнює нулю лише при $b = 0$.

Відповідь. 1) $x = 3$; 2) $a = 2, a = -1$; 3) $b = 0$.

А ще раніше...

Давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. н. е.) розглянув раціональні дробі та дії з ними у своїй праці «Арифметика». Зокрема на сторінках цієї книжки можна зустріти доведення тотожностей

$$30 \cdot \frac{144}{x^4 + 900 - 60x^2} + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$$

$$\text{та } \frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2} - \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2},$$

які записано тодішньою символікою.

Видатний англійський учений Ісаак Ньютон (1643–1727) у своїй монографії «Універсальна арифметика» (1707 р.) означає дріб наступним чином: «Запис однієї з двох величин під іншою, нижче якої між ними проведено риску, означає частку або ж величину, що виникає при діленні верхньої величини на нижню». У цій роботі Ньютон розглядає не тільки звичайні дробі, а й раціональні.



1. Які вирази називають цілими раціональними виразами, а які – дробовими раціональними виразами? Наведіть приклади таких виразів.
2. Які вирази називають раціональними виразами?
3. Які дробі називають раціональними дробами?
4. Що називають допустимими значеннями змінної?
5. Коли дріб $\frac{P}{Q}$ дорівнює нулю?



Початковий рівень

1. (Усно.) Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) $m^2 + 2m - 8$; 4) $\frac{b-2}{8}$;

5) $\frac{1}{x^2 + m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2 + 7p$; 8) $a^2 + \frac{2}{a}$?

2. З раціональних виразів $a^3 - ab$; $\frac{m}{17}$; $\frac{17}{a}$; $t(t-1) + \frac{t}{p}$; $\frac{1}{9}a - \frac{1}{8}b$;
 $\frac{7}{x^2 + 1} - 5$ випишіть ті, що є: 1) цілими; 2) дробовими.

3. Які з дробів є раціональними дробами:

1) $\frac{a}{a^2 - 3}$; 2) $\frac{m\left(n + \frac{1}{k}\right)}{p^2 - 2}$; 3) $\frac{x^2 - 4x + 5}{y^2 - 9}$; 4) $\frac{x}{m-3}$?



Середній рівень

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3a+9}{a^2}$, якщо $a = 1$; -2 ; -3 ;

2) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-2}$, якщо $x = 4$; -1 .

5. Дізнайтеся прізвище видатного українського авіаконструктора. Для цього знайдіть значення виразу з першої таблиці та перенесіть літери, що відповідають цим значенням, у другу таблицю. Користуючись будь-якими інформаційними джерелами, ознайомтеся з біографією цього авіаконструктора.

x	-3	-1	0	2	3
$\frac{1+x}{1-x}$					
Літери	Т	В	А	О	Н

1	-2	-0,5	-3	-2	-3	0

6. Складіть дріб:

1) чисельником якого є різниця змінних a і b , а знаменником – їх сума;

2) чисельником якого є добуток змінних x і y , а знаменником – сума їх квадратів.

7. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) m^2 - 5; \quad 2) \frac{3a - 5}{a}; \quad 3) \frac{7b + 9}{8}; \quad 4) \frac{t - 9}{t + 1};$$

$$5) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{2}{x - 7}; \quad 6) \frac{p + 2}{p(p - 1)}; \quad 7) \frac{3}{x^2 + 1}; \quad 8) \frac{1}{m} + \frac{1}{|m| + 5}.$$

8. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) p + 9; \quad 2) \frac{a - 7}{a + 4}; \quad 3) \frac{b - 9}{4};$$

$$4) \frac{x^2 - 3}{x(x + 2)}; \quad 5) \frac{2y}{y - 1} + \frac{3}{y + 6}; \quad 6) \frac{4}{m^2 + 2}.$$

9. За t год автомобіль подолав 240 км. Складіть вираз для обчислення швидкості автомобіля (у км/год). Знайдіть значення одержаного виразу, якщо $t = 3$; 4.

10. Учень витратив 48 грн для придбання n ручок. Складіть вираз для обчислення ціни ручки (у грн) та обчисліть його значення, якщо $n = 8$; 10.



3 Достатній рівень

11. При якому значенні змінної значення дробу $\frac{x + 2}{8}$ дорівнює:

$$1) -2; \quad 2) 9; \quad 3) 0,01; \quad 4) -4,9?$$

12. При якому значенні змінної значення дробу $\frac{m - 1}{10}$ дорівнює:

$$1) -8; \quad 2) 0,25?$$

13. При якому значенні x дорівнює нулю дріб:

$$1) \frac{4x - 8}{x}; \quad 2) \frac{x(x + 3)}{x^2};$$

$$3) \frac{(x - 1)(x + 7)}{x + 5}; \quad 4) \frac{3x - 6}{8 - 4x}?$$

14. При якому значенні y дорівнює нулю дріб:

1) $\frac{y}{5y-7}$; 2) $\frac{(y+1)y}{y^7}$; 3) $\frac{(y+2)(y-3)}{y+4}$; 4) $\frac{y+1}{5y+5}$?

15. Знайдіть допустимі значення змінної y у виразі:

1) $\frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}$; 2) $\frac{t+2}{t^2-7t}$; 3) $\frac{m}{m^2-25}$; 4) $\frac{5}{(x-9)^2}$.

16. Знайдіть допустимі значення змінної y у виразі:

1) $\frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}$; 2) $\frac{a+2}{5a-a^2}$; 3) $\frac{c}{4-c^2}$; 4) $\frac{a}{(a+1)^2}$.

17. Складіть вираз зі змінною x , що мав би зміст при будь-яких значеннях x , крім: 1) $x = 2$; 2) $x = 1$ і $x = -4$.



Високий рівень

18. Знайдіть допустимі значення змінної y у виразі:

1) $\frac{37}{a(a-2)-3a+6}$; 2) $\frac{x}{|x|-1}$; 3) $\frac{5m}{1-\frac{1}{m}}$; 4) $\frac{4k}{4-|k-2|}$.

19. Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{12}{x(x+2)-4x-8}$; 2) $\frac{m}{4-|m|}$; 3) $\frac{7}{\frac{1}{x}+1}$; 4) $\frac{2a}{|a+2|-3}$.

20. Визначте знак дробу:

1) $\frac{x^7}{y^8}$, якщо $x > 0$, $y < 0$; 2) $\frac{m+1}{n^7}$, якщо $m > 0$, $n < 0$;
3) $\frac{|p-1|}{n^{19}}$, якщо $p < 0$, $n > 0$; 4) $\frac{|a|+1}{c^8}$, якщо $a < 0$, $c < 0$.

21. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення дробу:

1) $\frac{7}{a^2+1}$ є додатним; 2) $\frac{4}{-p^2-2}$ є від'ємним;
3) $\frac{(a+1)^2}{a^2+7}$ є невід'ємним; 4) $\frac{-(p^2-4)^2}{p^4+1}$ є недодатним.



Вправи для повторення

22. Перетворіть вираз на многочлен:

- 1) $(a^2 + 2a - 7) - (a^2 - 4a - 9)$; 2) $3x^2y(2x - 3y + 7)$;
 3) $(x^2 - 2x)(x + 9)$; 4) $(x^2 - 5)^2 + 10x^2$.

23. Розв'яжіть рівняння:

$$4x(2x - 7) + 3x(5 - 2x) = 2x^2 + 39.$$



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

24. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{7}{14}$; 2) $\frac{25}{35}$; 3) $\frac{12}{18}$; 4) $\frac{30}{45}$; 5) $\frac{36}{48}$; 6) $\frac{51}{85}$.

25. Зведіть дріб:

- 1) $\frac{1}{8}$ до знаменника 24; 2) $\frac{2}{7}$ до знаменника 28;
 3) $\frac{4}{15}$ до знаменника 30; 4) $\frac{8}{9}$ до знаменника 63.

26. Подайте у вигляді степеня вираз:

- 1) m^3m^4 ; 2) pp^7 ; 3) $x^9 : x^3$;
 4) $(a^3)^7$; 5) $b^2 \cdot (b^3)^4$; 6) $(c^4)^5 : c^{12}$.

27. На який вираз треба помножити одночлен $2a^2b$, щоб отримати:

- 1) $2a^3b$; 2) $2a^2b^4$; 3) $4a^5b$; 4) $16a^4b^3$?

28. Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $ab - b^2$; 2) $m^7 + m^5$; 3) $8m^2 - 4mn$;
 4) $6a^3b - 15a^2b^2$; 5) $x^2 + 6x + 9$; 6) $c^2 - 10c + 25$;
 7) $x^2 - 25$; 8) $p^4 - 49m^2$; 9) $a^2 + ab + 7a + 7b$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



29. (Київська міська олімпіада, 1985 р.) Знайдіть усі такі трицифрові числа, які у 12 разів більші за суму своїх цифр.

132. З двох міст одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Відстань між містами становить s км, швидкості велосипедистів v_1 км/год і v_2 км/год. Через t год вони зустрілися. Складіть формулу для обчислення t . Знайдіть значення t , якщо $s = 150$ км, $v_1 = 12$ км/год, $v_2 = 13$ км/год.

133. Відомо, що $\frac{x}{y} = 3$. Знайдіть значення дробу:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

134. Виконайте множення:

1) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}$; 2) $\frac{3}{7} \cdot 1\frac{5}{9}$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$; 4) $7\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$.

135. Обчисліть: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



136. Для шкільної актової зали придбали люстру на 31 лампочку. Директор школи хоче мати можливість вмикати будь-яку їх кількість, від 1 до 31. Яка найменша кількість звичайних вимикачів для цього знадобиться?

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Який з виразів не є цілим раціональним виразом?

А. $\frac{1}{5}a^2xy$; Б. $\frac{m-3}{5}$; В. $\frac{5}{m-3}$; Г. $0,25x + y$.

2. Скоротіть дріб $\frac{5ax}{5xy}$.

А. $\frac{5a}{y}$; Б. $\frac{a}{y}$; В. $\frac{y}{a}$; Г. $\frac{a}{5y}$.

3. Виконайте дію $\frac{m}{3} - \frac{5}{b}$.

- А. $\frac{m-5}{3-b}$; Б. $\frac{3m-5b}{3b}$; В. $\frac{15-mb}{3b}$; Г. $\frac{mb-15}{3b}$.

2 4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{a-3}{a+2}$.

- А. a – будь-яке число;
 Б. a – будь-яке число, крім 3;
 В. a – будь-яке число, крім -2;
 Г. a – будь-яке число, крім -2 і 3.

5. Скоротіть дріб $\frac{2p+4}{p^2-4}$.

- А. $\frac{2}{p-2}$; Б. $\frac{2}{p+2}$; В. $\frac{2}{p}$; Г. $\frac{2}{2-p}$.

6. Виконайте дію $\frac{4m}{m-a} + \frac{4a}{a-m}$.

- А. $\frac{4m+4a}{m-a}$; Б. 4; В. -4; Г. $\frac{4m+4a}{a-m}$.

3 7. При яких значеннях x дріб $\frac{(3+x)(1-x)}{5x-5}$ дорівнює нулю?

- А. -3 і 1; Б. -3; В. 1; Г. таких значень x немає.

8. Спростіть вираз $\frac{2m}{m-3} + \frac{m}{m+3} + \frac{2m^2}{9-m^2}$.

- А. $\frac{m}{m-3}$; Б. $\frac{m}{m+3}$; В. $\frac{5m^2+3m}{m^2-9}$; Г. $-\frac{1}{3}$.

9. Подайте дріб $\frac{m^3-m^4+3}{m^3}$ у вигляді суми цілого виразу і дробу.

- А. $1 - \frac{1}{m} + \frac{3}{m^3}$; Б. $1 + \frac{3}{m^3}$; В. $1 - m + \frac{3}{m^3}$; Г. $1 - m + \frac{1}{m^3}$.

4 10. При яких значеннях x вираз $\frac{x^2-9}{|x+1|-4}$ має зміст?

- А. x – будь-яке число;
 Б. x – будь-яке число, крім 3;
 В. x – будь-яке число, крім -5;
 Г. x – будь-яке число, крім 3 і -5.

11. При яких значеннях x дріб $\frac{x^2 - 9}{|x + 1| - 4}$ дорівнює нулю?

- А. 3; Б. 3 і -3; В. -3; Г. 3; -5.

12. Знайдіть значення виразу $\frac{2(x - 4y)}{(x - 2)(y - 1)} - \frac{x^2 - 8y}{(2 - x)(1 - y)}$,

якщо $x = 13$, $y = 0,99$.

- А. 1300; Б. -1300; В. 130; Г. -130.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАЇЬ ДО § 1-4

1 1. Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

- 1) $\frac{1}{3}a^2b$; 2) $\frac{x - y}{x}$; 3) $\frac{c + 2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?

2. Скоротіть дріб: 1) $\frac{m^2}{mn}$; 2) $\frac{4ab}{4bc}$.

3. Виконайте дію: 1) $\frac{a - b}{n} + \frac{b}{n}$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{3}{y}$.

2 4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $\frac{5}{x(x - 1)}$; 2) $\frac{2a}{a + 2} + \frac{1}{a - 3}$.

5. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{16am}{20bm}$; 2) $\frac{12am^2}{8mc}$; 3) $\frac{2m - 6}{m^2 - 9}$; 4) $\frac{ax + 2a}{x^2 + 4x + 4}$.

6. Виконайте дію:

- 1) $\frac{3a}{a - b} + \frac{3b}{b - a}$; 2) $\frac{5x + y}{x^2y} + \frac{x - 5y}{xy^2}$.

3 7. Спростіть вираз $\frac{2b}{b - 4} + \frac{b}{b + 4} + \frac{2b^2}{16 - b^2}$.

8. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

- 1) $\frac{c^2 - c^3 + 5}{c^2}$; 2) $\frac{p^2 - p - 2}{p - 1}$.

4 9. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 4x}{16 - 4x}$.

Додаткові завдання

4 10. Знайдіть: 1) область визначення виразу $\frac{x^2 - 16}{|x + 1| - 5}$;

2) значення x , при яких дріб $\frac{x^2 - 16}{|x + 1| - 5}$ дорівнює нулю.

11. Спростіть вираз $\frac{3(a - 2b)}{(a - 3)(b - 4)} - \frac{a^2 - 6b}{(3 - a)(4 - b)}$.



5. МНОЖЕННЯ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

Нагадаємо, що добутком двох звичайних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник – добутку знаменників даних дробів:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a , b , c і d за умови, що $b \neq 0$ і $d \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = p$, $\frac{c}{d} = q$. Тоді за означенням частки $a = bp$, $c = dq$. Тому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Оскільки $bd \neq 0$, то, знову врахувавши означення частки, одержимо: $pq = \frac{ac}{bd}$. Отже, якщо $b \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Сформулюємо *правило множення дробів*.



Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо чисельники і окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий – знаменником дробу.

Приклад 1. Виконайте множення $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2}$.

Розв'язання. $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2} = \frac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \frac{4b^2}{3m}$.

Відповідь. $\frac{4b^2}{3m}$.

1059. Бригада робітників мала виготовити у певний термін 800 однакових віконних блоків. У перші 5 днів бригада щоденно виготовляла заплановану кількість блоків, а потім кожного дня – на 5 блоків більше, ніж планувала, тому вже за день до визначеного терміну було виготовлено 830 віконних блоків. Скільки віконних блоків мала щодня виготовляти бригада за планом?

«Бажаємо тобі стати другим Остроградським...»

Михайло Васильович Остроградський народився 12 вересня 1801 року у с. Пашенна Полтавської губернії (нині с. Пашенівка). Діди і прадіди Михайла Васильовича служили в козацькому війську, брали участь у багатьох боях, не раз виявляли військову доблесть і героїзм. Мабуть саме тому в дитинстві Михайло Васильович так мріяв стати військовим. Але йому судилося стати всесвітньо відомим ученим.

У дитинстві Михайло виявляв виняткову спостережливість і захоплювався вимірюваннями. Навчався він у пансіоні при Полтавській гімназії, потім у самій гімназії. Закінчивши гімназію, став вільним слухачем Харківського університету, а згодом і його студентом. Після закінчення університету з відзнакою у серпні 1820 року менш ніж за рік потому (у квітні 1821 року) отримує ступінь кандидата наук за дослідження у галузі прикладної математики. У 1822 році Остроградський вирушає до Парижа з метою удосконалення своєї математичної освіти, ставши слухачем університету у Сорбонні. Саме там він публікує свої перші наукові праці, стає відомим науковцем та здобуває авторитет у французьких математиків. Але через постійний брак коштів Михайло Васильович був вимушений залишити Париж, майже пішки подолавши взимку 1828 року шлях від Парижа до Петербурга.



М.В. Остроградський
(1801–1862)

Наукові кола Петербурга зустріли молодого вченого з радістю і надією. Його авторитет серед петербурзьких діячів науки був високим і незаперечним. У тому ж 1828 році Остроградський починає викладацьку діяльність у Морському кадетському корпусі Петербурга та стає ад'юнктом Петербурзької академії наук. А з 1830 року викладає ще у чотирьох вищих навчальних закладах Петербурга. У 1834 році Остроградського було обрано членом Американської академії наук, у 1841 році – членом Туринської академії, у 1853 – членом Римської академії Лінчів і у 1856 році – членом-кореспондентом Паризької академії наук.

Лекції Остроградського відвідували не лише студенти, а й викладачі, професори, відомі математики. Усіх приваблювала

його система викладання предмета – широка загальність теми, виразність і стислість викладу, а також веселий характер та гострий розум. На лекціях він обов'язково вживав українські слова, прислів'я та приказки. Тому студенти завжди згадували його лекції із захватом.

Улюбленим письменником Остроградського був Т.Г. Шевченко, з яким він був особисто знайомий та значну частину творів якого знав напам'ять і охоче декламував. У 1858 році, коли Тарас Григорович повертався із заслання через Петербург на батьківщину, Михайло Васильович запропонував Кобзареві для проживання свою петербурзьку квартиру.

Повернувшись із заслання, Шевченко писав у «Щоденнику»: «Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як земляка і як свого сім'янина, що надовго кудись виїжджав».

Михайло Васильович був визначною, оригінальною, усебічно обдарованою людиною. Його високо цінували не тільки за розум, а й за незалежність, демократизм, скромність, щирість і простоту, за повагу до людей праці, за його гідність. Перебуваючи на вершині слави, вшанований за свої наукові праці у всій Європі, Остроградський поводив себе надзвичайно просто і не любив говорити про свої заслуги.

І хоч які б проблеми розв'язував вчений (він займався алгеброю, прикладною математикою, теорією чисел, теорією ймовірностей, механікою тощо), усі його наукові праці позначені глибиною думки й оригінальністю, у них незмінно присутня широта його поглядів, уміння глибоко проникнути в суть проблеми і знайти численні узагальнення.

На все життя Михайло Васильович зберіг любов до рідної Землі та рідної мови. Майже щороку влітку він виїжджав в Україну, щоб поринути у повний спокій та помилуватися чудовими краєвидами. Улітку 1861 року Остроградський, відвідуючи своє рідне село, захворів і 1 січня 1862 року помер.

За свою майже 40-річну наукову діяльність Михайло Васильович написав понад 50 наукових праць з різних галузей математики: математичного аналізу, аналітичної і небесної механіки, математичної фізики, теорії ймовірностей. Свої педагогічні погляди М.В. Остроградський виклав у підручниках з елементарної і вищої математики.

Ім'я М.В. Остроградського носить Кременчуцький національний університет.

Попри те, що майже все своє життя Михайло Остроградський займався наукою поза межами України, він став широко відомим серед своїх співвітчизників. Авторитет і популярність М.В. Остроградського були настільки значними, що саме його ім'я стало синонімом вченого. Батьки, віддаючи дитину на навчання, бажали їй «стати другим Остроградським».



Раціональні вирази

1060. Доведіть, що при додатних значеннях a і b ($a \neq b$) значення дробу $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ більше за відповідне значення дробу $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

1061. Скоротіть дріб $\frac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^3 + n^3}$.

1062. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}} \cdot \left(1 + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right) : \frac{x - y - z}{xyz};$$

$$2) \frac{\frac{m-n}{2m-n} - \frac{m^2+n^2+m}{2m^2+mn-n^2}}{(4n^4+4mn^2+m^2) : (2n^2+m)} \cdot (n^2+n+mn+m);$$

$$3) \frac{4}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} : \frac{1}{x + \frac{1}{y}} - \frac{4}{y(xyz + x + z)};$$

$$4) \left(\left(\frac{a}{b-a} \right)^{-2} - \frac{(a+b)^2 - 4ab}{a^2 - ab} \right)^2 \cdot \frac{a^4}{a^2b^2 - b^4};$$

$$5) \frac{p^{-6} - 64}{4 + 2p^{-1} + p^{-2}} \cdot \frac{p^2}{4 - 4p^{-1} + p^{-2}} - \frac{4p^2(2p+1)}{1-2p};$$

$$6) \frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-3} + y^{-3}} : \frac{x^2y^2}{(x+y)^2 - 3xy} \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{xy} \right)^{-1}.$$

1063. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^x \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^y \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{x-y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{x+y};$$

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ ТА АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

Десяткові дроби

Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно, записуючи їх один під одним так, щоб кома розміщувалася під комою.

$$\begin{array}{r} \text{П р и к л а д и. 1) } + 7,813 \\ \quad \quad \quad 9,4 \\ \hline 17,213 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2) - 12,47 \\ \quad \quad \quad 5,893 \\ \hline 6,577 \end{array}$$

Щоб *перемножити два десяткових дроби*, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити комою справа наліво стільки цифр, скільки їх стоїть після коми в обох множниках разом.

$$\begin{array}{r} \text{П р и к л а д и. 1) } \times 4,07 \\ \quad \quad \quad 2,9 \\ \hline + 3663 \\ \quad 814 \\ \hline 11,803 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2) \times 0,017 \\ \quad \quad \quad 0,9 \\ \hline 0,0153 \end{array}$$

Щоб *поділити десятковий дріб на натуральне число*, треба виконати ділення, не звертаючи уваги на кому, проте після закінчення ділення цілої частини діленого треба в частці поставити кому.

$$\begin{array}{r} \text{П р и к л а д и. 1) } \begin{array}{l} \underline{42,84} \overline{) 12} \\ \underline{36} \\ 68 \\ \underline{60} \\ 84 \\ \underline{84} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2) \begin{array}{l} \underline{0,024} \overline{) 5} \\ 20 \\ \underline{40} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Щоб *поділити десятковий дріб на десятковий*, треба в діленому і дільнику перенести кому на стільки цифр праворуч, скільки їх стоїть після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

$$\text{П р и к л а д. } 12,1088 : 2,56 = 1210,88 : 256 = 4,73.$$

Звичайні дроби

Частку від ділення числа a на число b можна записати у вигляді *звичайного дробу* $\frac{a}{b}$, де a – чисельник дробу, b – його знаменник.

Основна властивість дробу: величина дробу не зміниться, якщо його чисельник і знаменник помножити або поділити на одне й те саме натуральне число.

Приклади. 1) $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$ (скоротили дріб $\frac{15}{20}$ на 5);

2) $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ (звели дріб $\frac{3}{7}$ до знаменника 14).

Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають, використовуючи формули:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ і } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Приклади. 1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7};$

2) $\frac{17}{19} - \frac{3}{19} = \frac{14}{19};$

3) $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{5} = 9\frac{4}{5};$

4) $7\frac{5}{11} - 2\frac{2}{11} = 5\frac{3}{11}.$

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Приклади. 1) $\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15};$

2) $\frac{3}{8} - \frac{2}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}.$

У наступних прикладах показано, як виконати додавання і віднімання мішаних чисел.

Приклади. 1) $5\frac{4}{3} + 2\frac{3}{4} = 7\frac{4+9}{12} = 7\frac{13}{12} = 8\frac{1}{12};$

2) $7\frac{4}{5} - 6\frac{5}{4} = 1\frac{16-15}{20} = 1\frac{1}{20};$

3) $5\frac{2}{9} - 2\frac{3}{6} = 3\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 2\frac{26-15}{18} = 2\frac{11}{18}.$

Щоб помножити два дроби, треба перемножити їх чисельники і їх знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий – знаменником:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

ЗМІСТ

<i>Шановні восьмикласники!</i>	3
<i>Шановні вчителі!</i>	4
<i>Шановні батьки!</i>	4

Розділ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дробі	5
§ 2. Основна властивість раціонального дробу	12
§ 3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками	19
§ 4. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками	26
<i>Домашня самостійна робота № 1</i>	35
<i>Завдання для перевірки знань до § 1–4</i>	37
§ 5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня	38
§ 6. Ділення дробів	45
§ 7. Тотожні перетворення раціональних виразів	50
§ 8. Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння	58
<i>Домашня самостійна робота № 2</i>	66
<i>Завдання для перевірки знань до § 5–8</i>	68
§ 9. Степінь із цілим показником	69
§ 10. Властивості степеня із цілим показником	75
§ 11. Стандартний вигляд числа	81
§ 12. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості.....	87
<i>Домашня самостійна робота № 3</i>	95
<i>Завдання для перевірки знань до § 9–12</i>	97
<i>Вправи для повторення розділу 1</i>	98

Розділ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 13. Функція $y = x^2$, її графік і властивості.....	112
§ 14. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь	118
§ 15. Множина. Підмножина. Числові множини. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа.....	124
§ 16. Тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$. Рівняння $x^2 = a$	131
§ 17. Властивості арифметичного квадратного кореня	137
§ 18. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені	147
§ 19. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості	156
<i>Домашня самостійна робота № 4</i>	161
<i>Завдання для перевірки знань до § 13–19</i>	162
<i>Вправи для повторення розділу 2</i>	163

Розділ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 20. Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння	170
§ 21. Формула коренів квадратного рівняння	177
§ 22. Теорема Вієта	183
§ 23. Квадратне рівняння як математична модель текстових і прикладних задач	190
<i>Домашня самостійна робота № 5</i>	196
<i>Завдання для перевірки знань до § 20–23</i>	197

§ 24. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники	198
§ 25. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних	206
§ 26. Розв'язування задач за допомогою дробових раціональних рівнянь	214
<i>Домашня самостійна робота № 6</i>	219
<i>Завдання для перевірки знань до § 24–26</i>	220
<i>Вправи для повторення розділу 3.</i>	222
<i>«Бажаємо тобі стати другим Остроградським...»</i>	229
Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу	231
Задачі підвищеної складності	232
Відомості з курсу математики 5–6 класів та алгебри 7 класу ...	240
Вправи на повторення курсу алгебри 7 класу	252
<i>Відповіді та вказівки до вправ</i>	254
<i>Предметний покажчик</i>	270

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано

Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Головний редактор *Наталія Заблоцька*

Редактор *Оксана Єргіна*

Обкладинка *Олени Мамаєвої*

Технічний редактор *Цезарина Федосіхіна*

Макет, художнє оформлення *Людмили Кузнецової*

Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедева*

Коректори *Лариса Леуська, Інна Іванюсь*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 17. Обл.-вид. арк. 18,7.
Тираж пр. Вид. № 1732. Зам. №

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4526 від 18.04.2013.