ВІД АВТОРА

Шановні восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати геометрію, а підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам’ятати.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

– означення, важливі геометричні твердження (аксіоми, теореми, властивості);

– запитання до вивченого теоретичного матеріалу;

▲ – закінчення доведення теореми або задачі;

– «ключова» задача, висновки якої використовуються під час розв’язування інших задач;

– вправи для повторення;

– рубрика «Розв’яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»;

– вправи підвищеної складності;

– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

Чорним кольором позначено номери вправ для розв’язування у класі, а **синім** – для розв’язування вдома.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс геометрії 8 класу» та «Задачі підвищеної складності». Заняття геометрією стануть ще цікавішими, якщо ви розв'язуватимете вправи рубрики «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Пригадати раніше вивчене вам допоможуть «Відомості з курсу геометрії 7 класу» та «Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу», які розміщено в кінці підручника.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу у школі його обов'язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи; інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У кінці підручника в додатку під назвою «Готуємося до ЗНО» подано добірку задач, що в різні роки пропонувалися абітурієнтам на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, для розв'язання яких достатньо знань з геометрії за 8-й клас. Розв'язавши ці задачі, ви зробите ще один крок уперед для успішної підготовки до майбутніх випробувань, які чекатимуть на вас під час вступу до омріяного вишу.

Цікаві факти з історії розвитку геометрії як науки ви знайдете у рубриці «А ще раніше...»

Бажаю успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на додаткових, факультативних та індивідуальних заняттях.

Додаткові вправи у «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів та задачі з додатка «Готуємося до ЗНО» можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнюючих уроків з теми або повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Організувати повторення курсу геометрії 7 класу на початку навчального року та пригадати відповідний теоретичний матеріал можна, запропонувавши учням розв'язати «Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу» та прочитати відповідні теоретичні відомості, які розміщено у кінці підручника.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв'язати задачі і вправи, що їй посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 8 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

У кінці підручника «Задачі підвищеної складності» допоможуть вашій дитині поглибити знання з геометрії та підготуватися до математичних змагань.

Розділ 1 ЧОТИРИКУТНИКИ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття прямокутника і квадрата;
- **дізнаєтеся** про паралелограм та його властивості, трапецію; центральні та вписані кути; вписані та описані чотирикутники; середню лінію трикутника та середню лінію трапеції; теорему Фалеса;
- **навчитеся** обґрунтовувати належність чотирикутника до певного виду, застосовувати вивчені означення і властивості до розв'язування задач.

§ 1. ЧОТИРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА

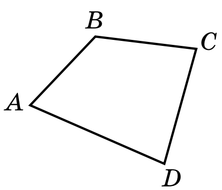
***Чотирикутником* називають фігуру, що складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають.**

Ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не повинні мати жодних інших спільних точок, крім даних.

Будь-який чотирикутник обмежує певну частину площини, яка є внутрішньою областю чотирикутника.

На малюнку 1 зображено чотирикутник $ABCD$. Точки A, B, C, D називають ***вершинами*** чотирикутника, а відрізки AB, BC, CD і DA, що їх сполучають, – ***сторонами*** чотирикутника.

Вершини чотирикутника, які є кінцями однієї його сторони, називають ***сусідніми***, несусідні вершини називають ***протилежними***. На мал. 1 вершини A і B – сусідні, A і C – протилежні.

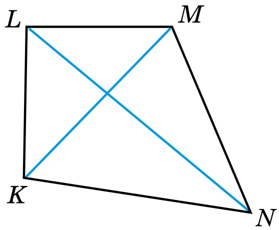


Мал. 1

Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, називають ***сусідніми*** або ***суміжними***, а які не мають спільної вершини, – ***протилежними***. На мал. 1 сторони AB і BC – сусідні (суміжні), сторони AB і CD – протилежні.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають літерою P. Наприклад, периметр чотирикутника $ABCD$ можна позначити як P_{ABCD}:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$

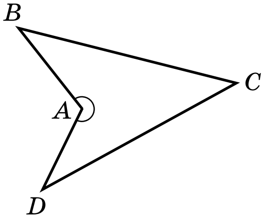


Мал. 2

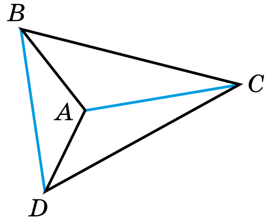
Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, називають ***діагоналями*** чотирикутника. На мал. 2 відрізки KM і LN – діагоналі чотирикутника $KLMN$. Будь-який чотирикутник має дві діагоналі.

Кутами чотирикутника $ABCD$ називають кути DAB, ABC, BCD і CDA (мал. 1). Кути чотирикутника називають ***протилежними***, якщо їх вершини – протилежні вершини чотирикутника, і ***сусідніми***, якщо їх вершини – сусідні вершини чотирикутника. На малюнку 1 кути A і C – протилежні, A і B – сусідні.

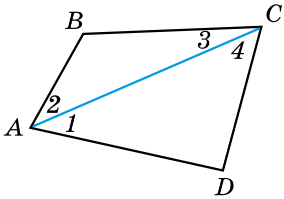
Один з кутів чотирикутника може бути більшим за розгорнутий. Наприклад, на малюнку 3 кут A чотирикутника $ABCD$ є більшим за розгорнутий. Такий чотирикутник називають ***неопуклим***. Якщо ж усі кути чотирикутника менші від 180°, то його називають ***опуклим***. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (мал. 2), а неопуклого не перетинаються (мал. 4).



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

Т е о р е м а (про суму кутів чотирикутника). **Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.**

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – деякий чотирикутник. Проведемо в ньому діагональ AC (мал. 5). Тоді $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$. Враховуючи, що $\angle 2 + \angle B + \angle 3 = 180°$ (як сума кутів ΔABC), $\angle 1 + \angle D + \angle 4 = 180°$ (як сума кутів ΔADC), матимемо: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle D = (\angle 2 + \angle B + \angle 3) + (\angle 1 + \angle D + \angle 4) = 180° + 180° = 360°$. ▲

Задача. Знайдіть кути чотирикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 10 : 4 : 1. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

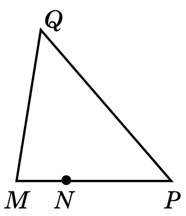
Р о з в' я з а н н я. Нехай кути чотирикутника дорівнюють $3x$, $10x$, $4x$ і x. Маємо рівняння $3x + 10x + 4x + x = 360$, звідки $x = 20$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють $3 \cdot 20° = 60°$, $10 \cdot 20° = 200°$, $4 \cdot 20° = 80°$ і $20°$. Оскільки один з кутів чотирикутника більший за $180°$, то цей чотирикутник – неопуклий.

В і д п о в і д ь. $60°$, $200°$, $80°$, $20°$; неопуклий.

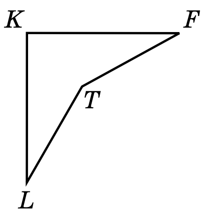
1. Яку фігуру називають чотирикутником?
2. Що називають вершинами чотирикутника, сторонами чотирикутника?
3. Які вершини чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними?
4. Що таке діагоналі чотирикутника?
5. Які сторони чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними?
6. Що називають периметром чотирикутника?
7. Що називають кутами чотирикутника?
8. Які кути чотирикутника називають протилежними, а які – сусідніми?
9. Який чотирикутник називають неопуклим, а який – опуклим?
10. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.

1 Початковий рівень

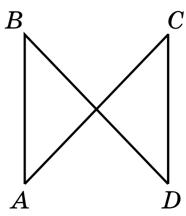
1. (Усно.) Які з фігур (мал. 6–9) є чотирикутниками? Назвіть опуклі та неопуклі чотирикутники.



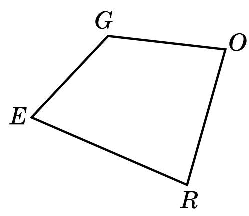
Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9

2. Назвіть пари протилежних сторін чотирикутника *EGOR* (мал. 9), пари сусідніх сторін. Назвіть пари сусідніх вершин цього чотирикутника, пари протилежних вершин.

3. Накресліть чотирикутник $KLMN$. Назвіть пари його протилежних сторін, сусідніх сторін, протилежних вершин, сусідніх вершин. Проведіть діагоналі цього чотирикутника.

4. Накресліть опуклий чотирикутник $ABCD$ і неопуклий $PMLK$. Проведіть діагональ у кожному з них.

5. Чи існує чотирикутник з кутами:

1) $80°$, $90°$, $100°$ і $110°$; 2) $150°$, $60°$, $70°$ і $80°$?

6. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:

1) $120°$, $80°$, $90°$ і $70°$; 2) $130°$, $110°$, $80°$ і $50°$?

2 Середній рівень

7. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:

1) $150°$, $110°$ і $80°$; 2) $80°$, $60°$ і $30°$.

Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

8. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:

1) $20°$, $70°$ і $80°$; 2) $120°$, $50°$ і $40°$.

Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

9. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 32 мм, 2,5 см, 0,4 дм і 0,07 м.

10. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 0,08 м, 0,7 дм, 6,3 см і 54 мм.

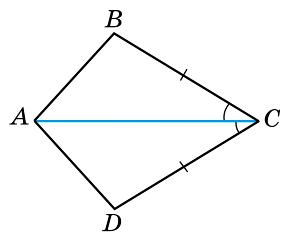
11. Чи можуть усі кути чотирикутника бути: 1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?

12. Один з кутів чотирикутника дорівнює $120°$, а інші – між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

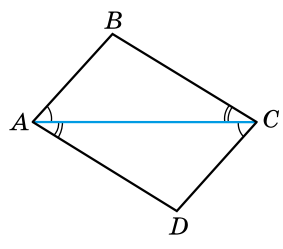
13. Периметр чотирикутника дорівнює 60 см, а одна з його сторін – 24 см. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, якщо вони між собою рівні.

14. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 10) $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

15. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 11) $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$. Доведіть, що $AB = CD$.



Мал. 10



Мал. 11

3 Достатній рівень

16. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 8 і 9, а периметр чотирикутника дорівнює 65 см.

17. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 7 і 8.

18. Знайдіть невідомі кути чотирикутника, якщо один з них дорівнює 90°, другий і третій відносяться як 7 : 5, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

19. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 54 см, одна зі сторін 18 см, друга та третя відносяться як 7 : 3, а четверта дорівнює піврізниці другої та третьої.

20. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не більший за 90°.

21. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не менший від 90°.

22. Чи може кут чотирикутника бути більшим за суму інших його кутів?

4 Високий рівень

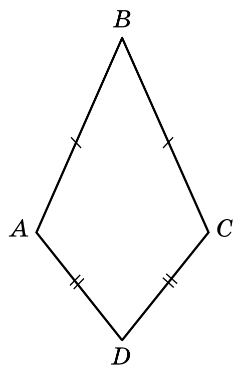
23. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см та кутом 50° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

24. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 4 см, 3 см та кутом 70° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

25. Опуклий чотирикутник називають *дельтоїдом*, якщо він має дві пари рівних сусідніх сторін (мал. 12). Доведіть, що:

1) діагональ BD ділить навпіл як кут B, так і кут D;

2) діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні.



Мал. 12

26. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 29 см, периметр трикутника ADB – 20 см, а трикутника CDB – 21 см. Знайдіть довжину діагоналі BD.

Вправи для повторення

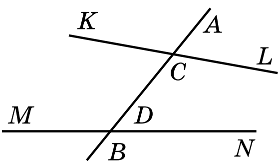
27. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює $70°$. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

28. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює $70°$. Скільки розв'язків має задача?

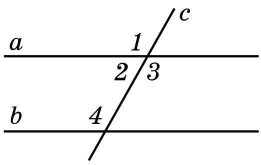
29. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює $60°$, а сума меншого катета і медіани, проведеної до гіпотенузи, – 10 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

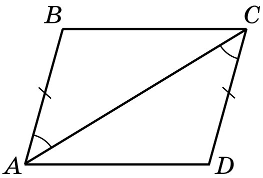
30. Пряма AB є січною для прямих KL і MN (мал. 13). Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів та відповідних кутів.



Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15

31. Яким є взаємне розміщення прямих a і b (мал. 14), якщо:

1) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$;
2) $\angle 1 > \angle 4$;
3) $\angle 3 = 120°$; $\angle 4 = 121°$;
4) $\angle 2 = 60°$; $\angle 4 = 119°$;
5) $\angle 1 = \angle 4 = 122°$;
6) $\angle 3 = \angle 4$?

32. 1) Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 15), якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

2) Доведіть, що $BC = AD$ і $\angle BCA = \angle CAD$.

3) Чи паралельні прямі BC і AD?

Цікаві задачі для учнів неледачих

33. (*Всеукраїнська олімпіада з математики, 1964 р.*) Знайдіть найбільше значення n, при якому n точок можна розмістити на площині так, щоб кожні три з них були вершинами прямокутного трикутника.

181. Бісектриса кута B прямокутника $ABCD$ ділить сторону AD на відрізки AK і KD так, що $AK : KD = 3 : 5$. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 110 см.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

182. 1) Накресліть чотирикутник, дві сторони якого між собою паралельні, а дві інші – непаралельні.
2) Яка найбільша кількість гострих кутів може бути в такому чотирикутнику?

Цікаві задачі для учнів неледачих

183. О 12-й годині годинна і хвилинна стрілки збігаються. Через яку найменшу кількість хвилин стрілки знову збіжаться?

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Укажіть відрізок, що є діагоналлю чотирикутника $ABCD$.

А. AB; **Б.** BD; **В.** BC; **Г.** AD.

2. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 35°.

А. 125°; **Б.** 135°; **В.** 145°; **Г.** 155°.

3. Знайдіть сторону квадрата, якщо його периметр дорівнює 36 см.

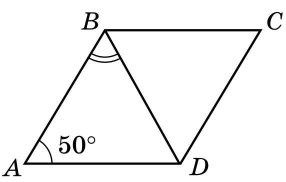
А. 4 см; **Б.** 6 см; **В.** 9 см; **Г.** 12 см.

4. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна з його сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

А. 5 см; **Б.** 6 см; **В.** 7 см; **Г.** 8 см.

5. $ABCD$ – ромб; $\angle A = 50°$ (мал. 64). Знайдіть $\angle ABD$.

А. 55°; **В.** 75°;
Б. 50°; **Г.** 65°.



Мал. 64

6. Укажіть правильне твердження:

А. якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він є ромбом;

Б. відношення периметра ромба до його сторони є сталим для всіх ромбів;

В. якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником;

Г. відношення периметра прямокутника, який не є квадратом, до його найбільшої сторони є незмінним для всіх прямокутників.

3 **7.** Знайдіть найбільший кут чотирикутника, у якого градусні міри кутів пропорційні числам 2; 3; 5 і 8.

А. 120°; **Б.** 130°; **В.** 150°; **Г.** 160°.

8. Висоти, які проведено з вершини тупого кута паралелограма, утворюють між собою кут 30°. Знайдіть тупий кут паралелограма.

А. 120°; **Б.** 130°; **В.** 150°; **Г.** 160°.

9. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 40°.

А. 25°; **Б.** 30°; **В.** 50°; **Г.** 60°.

4 **10.** Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону AB на відрізки AK і KB так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть AB, якщо периметр паралелограма дорівнює 60 см.

А. 26 см; **Б.** 24 см; **В.** 20 см; **Г.** 15 см.

11. З вершини тупого кута A ромба $ABCD$ проведено висоту AK. $\angle CAK = 30°$, $AC = 6$ см. Знайдіть периметр ромба.

А. 18 см; **Б.** 24 см; **В.** 30 см; **Г.** 36 см.

12. У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $AC = BC$) вписано квадрат $KLMN$ так, що $K \in AB$; $L \in AB$; $M \in CB$; $N \in AC$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AB = 12$ см.

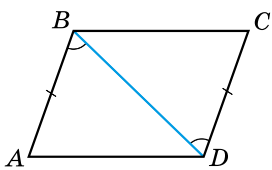
А. 24 см; **Б.** 20 см; **В.** 12 см; **Г.** 16 см.

Завдання для перевірки знань до § 1–5

1 **1.** Накресліть чотирикутник $MNPL$ і проведіть у ньому діагоналі.

2. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 80°.

3. Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 7 см.



Мал. 65

2 **4.** Периметр прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 1 см більша за другу.

5. $ABCD$ – ромб. $\angle ABD = 50°$. Знайдіть кути ромба.

6. На малюнку 65 $\angle ABD = \angle BDC$, $AB = DC$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

7. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4, 6. Опуклим чи неопуклим він є?

8. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут $120°$. Знайдіть кути ромба.

9. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 4 : 3$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

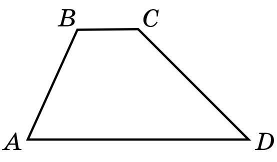
Додаткові завдання

10. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 23$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Сторона KL прямокутника на 2 см більша за сторону LM. Знайдіть периметр прямокутника.

11. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено висоту BM, $\angle DBM = 30°$. Периметр ромба дорівнює 40 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

§ 6. ТРАПЕЦІЯ

Трапецією **називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.**



Мал. 66

На малюнку 66 зображено трапецію $ABCD$. Паралельні сторони трапеції називають ***основами***, а не паралельні – ***бічними сторонами***. На малюнку 66 AD і BC – основи трапеції, AB і CD – її бічні сторони.

Розглянемо деякі *властивості трапеції.*

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює $180°$.

Оскільки $AD \parallel BC$, то $\angle A + \angle B = 180°$ (як сума внутрішніх односторонніх кутів). Аналогічно $\angle C + \angle D = 180°$.

2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$. Аналогічно $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$. Отже, трапеція – опуклий чотирикутник.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1
Чотирикутники

1010. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ зовні нього побудовано два рівносторонніх трикутники ABK і CDL. Доведіть, що відрізок KL проходить через точку перетину діагоналей паралелограма.

1011. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взято довільну точку K. Через цю точку паралельно BC і AC проведено прямі, які перетинають сторони трикутника. Доведіть, що периметр паралелограма, який при цьому утворився, не залежить від положення точки K.

1012. Точки A, B і C лежать на колі із центром O. $ABCO$ – паралелограм. Знайдіть його кути.

1013. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і висотою.

1014. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники, периметри яких однакові. Визначте вид чотирикутника.

1015. Коло з діаметром AC проходить через середину сторони AB ромба $ABCD$. Знайдіть тупий кут ромба.

1016. Зовні прямокутника $ABCD$ вибрано точку K так, що $\angle AKC = 90°$. Знайдіть $\angle DKB$.

1017. На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC побудовано квадрати $ACDE$ і $BCKL$. Прямі ED і KL перетинаються в точці P. Під яким кутом перетинаються прямі PC і AB?

1018. Сторони прямокутника дорівнюють a і b ($a > b$). Бісектриси чотирьох кутів прямокутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник. Знайдіть його діагоналі.

1019. Доведіть, що бісектриса кута паралелограма ділить навпіл кут між висотами, проведеними з вершини цього кута.

1020. Усередині квадрата $ABCD$ узято точку P і на відрізку AP, як на стороні, побудовано квадрат $APNM$, сторона якого PN перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Порівняйте між собою відрізки BP і DM.

1021. Доведіть, що в будь-якій трапеції сума бічних сторін більша за різницю більшої і меншої основ.

ДОДАТОК 1

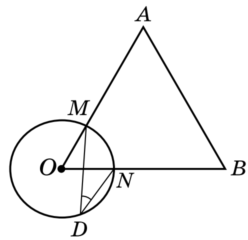
ГОТУЄМОСЯ ДО ЗНО

Розв'яжіть задачі, що пропонувалися на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) з математики минулих років та охоплюють курс геометрії 8-го класу. У дужках вказано, у якому році це завдання пропонувалося на ЗНО.

До кожного із завдань 1, 2, 4, 6, 9 оберіть правильний варіант відповіді із п'яти запропонованих варіантів (А–Д). До кожного із завдань 3, 5, 7, 8, 10–13 відповідь запишіть.

Тема «ЧОТИРИКУТНИКИ»

1. (2011 р.) На малюнку зображено коло з центром у точці O і рівносторонній трикутник AOB, що перетинає коло в точках M і N. Точка D належить колу. Знайдіть градусну міру кута MDN.



А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	120°

2. (2015 р.) На діагоналі AC квадрата $ABCD$ задано точку, відстань від якої до сторін AB і BC дорівнює 2 см і 6 см відповідно. Визначте периметр квадрата $ABCD$.

А	Б	В	Г	Д
16 см	24 см	32 см	48 см	64 см

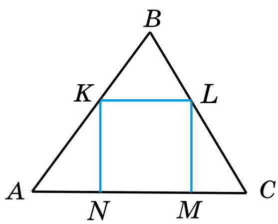
3. (2012 р.) Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає його більшу сторону BC в точці M. Визначте радіус кола (у см), описаного навколо прямокутника, якщо $BC = 24$ см, $AM = 10\sqrt{2}$ см.

Тема «ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ»

4. (2011 р.) У трикутнику ABC: $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a, паралельна стороні AB, перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC, якщо $MC = 5$ см.

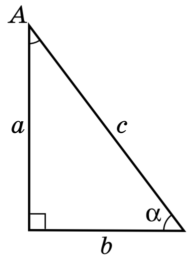
А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

5. (2013 р.) У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. малюнок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата (у см), якщо $AC = 10$ см.



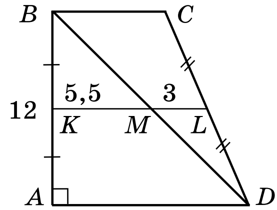
Тема «РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ»

6. (2015 р.) На малюнку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α. Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

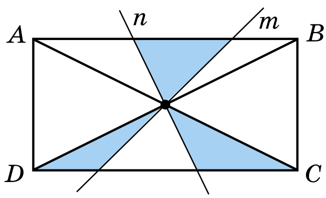
7. (2009 р.) У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. малюнок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5{,}5$ см і $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



8. (2006 р.) (Задача Л. Пізанського, XII–XIII ст.). Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (*у футах*).

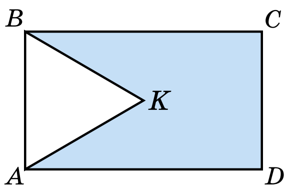
Тема «МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ»

9. (2006 р.) У прямокутнику $ABCD$ прямі m і n проходять через точку перетину діагоналей. Площа фігури, що складається з трьох зафарбованих трикутників, дорівнює 12 см². Обчисліть площу прямокутника $ABCD$.



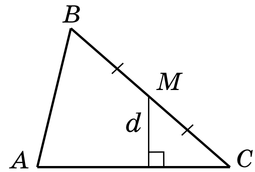
А	Б	В	Г	Д
24 см²	30 см²	36 см²	42 см²	48 см²

10. (2010 р.) На малюнку зображено прямокутник $ABCD$ і равносторонній трикутник ABK, периметри яких відповідно дорівнюють 20 см і 12 см. Знайдіть периметр п'ятикутника $AKBCD$ (у см).



11. (2013 р.) Менша сторона прямокутника дорівнює 16 м і утворює з його діагоналлю кут 60°. Середини всіх сторін прямокутника послідовно сполучено. Знайдіть значення виразу $\frac{S}{\sqrt{3}}$, де S – площа (у м²) утвореного чотирикутника.

12. (2013 р.) У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC, $AC = 24$ см (див. малюнок). Знайдіть відстань d (у см) від точки M до сторони AC, якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 см^2.



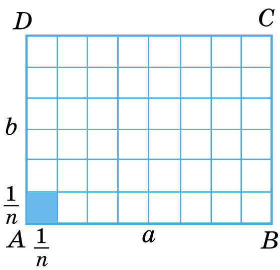
13. (2014 р.) Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см. Обчисліть (*у см²*) площу трапеції.

ДОДАТОК 2

ТЕОРЕМА ПРО ПЛОЩУ ПРЯМОКУТНИКА

Теорема (про площу прямокутника). **Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S = a \cdot b$.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – довільний прямокутник, у якого $AB = a$, $AD = b$ (мал. 255). Доведемо, що $S = ab$.



Мал. 255

1) Якщо довжини відрізків AB і AD є раціональними числами (цілими або дробовими), то існує відрізок такої довжини h, який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AB, і на відрізку AD.

Зведемо числа a і b до спільного знаменника n. Матимемо: $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$. Тоді $h = \frac{1}{n}$. Маємо $a = ph$, $b = qh$. Розіб'ємо відрізок AB на p рівних частин завдовжки h, а AD – на q рівних частин завдовжки h. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника (мал. 255). Ці прямі розіб'ють увесь прямокутник на pq рівних між собою квадратів зі стороною $h = \frac{1}{n}$ (один з таких квадратів зафарбовано на малюнку 255). Оскільки одиничний квадрат вміщує рівно n^2 квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$, то площа одного квадрата з такою стороною дорівнює $\frac{1}{n^2}$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів. Маємо:

$$S = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

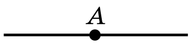
ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

Елементарні геометричні фігури та їх властивості

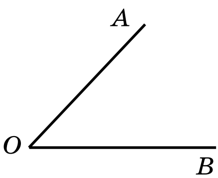
Основними геометричними фігурами на площині є *точка* і *пряма*.

Відрізком називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. На малюнку 257: відрізок AB, точки A і B – *кінці відрізка*.

Мал. 257



Мал. 258



Мал. 259

Точка A ділить пряму на дві частини (мал. 258). Кожну з отриманих частин разом з точкою A називають *променем*, що виходить із точки A. Тому A називають *початком* кожного з променів.

Два промені, що мають спільний початок та доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*.

Кут – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки. Промені називають *сторонами кута*, а їх спільний початок – *вершиною кута*. На малюнку 259: кут AOB, точка O – його вершина; OA і OB – сторони кута. Записати цей кут можна так: $\angle AOB$; $\angle BOA$; $\angle O$.

Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить його навпіл.

Аксіоми планіметрії

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

III. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка. (На малюнку 260: $AB = AC + CB$.)

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює $180°$.

ЗМІСТ