Уважаемые учащиеся!

В этом году вы продолжите изучать одну из самых важных математических дисциплин – алгебру. Поможет вам в этом учебник, который вы держите в руках.

При изучении теоретического материала обратите внимание на текст, напечатанный **жирным** шрифтом. Его надо запомнить.

Обратите внимание и на условные обозначения:

 – необходимо запомнить;  – упражнения для повторения;

 – вопросы и задания к изученному материалу;

 – рубрика «Решите и подготовьтесь к изучению нового материала»;

1 – задание для классной работы; **2** – для домашней работы;

 – рубрика «Интересные задачки для неленивых» и дополнительный материал.

Все упражнения распределены в соответствии с уровнями учебных достижений и обозначены следующим образом:

 – упражнения начального уровня;

 – упражнения среднего уровня;

 – упражнения достаточного уровня;

 – упражнения высокого уровня.

Знаком  выделены упражнения повышенной сложности.

Проверить свои знания и подготовиться к тематическому оцениванию можно, выполняя задания «Домашней самостоятельной работы» и «Задания для проверки знаний». После каждого раздела размещены упражнения для его повторения, а в конце учебника – «Задания для проверки знаний за курс алгебры 8 класса». «Задачи повышенной сложности» помогут подготовиться к математической олимпиаде и углубить знания по математике, «Сведения из курса математики 5–6 классов и курса алгебры 7 класса» – вспомнить изученные ранее темы, «Упражнения на повторение курса алгебры 7 класса» в конце учебника – проверить свои знания на начало учебного года.

Автор старался подать теоретический материал учебника простым, доступным языком, проиллюстрировать его большим количеством примеров. После изучения теоретического материала в школе его необходимо проработать дома.

Учебник содержит много упражнений. Большинство из них вы рассмотрите на уроках и во время выполнения домашней работы, остальные упражнения рекомендуется решить самостоятельно.

Интересные факты из истории развития и становления математики как науки вы найдете в рубрике «А еще раньше...».

Уважаемые учителя!

Предлагаемый учебник содержит много упражнений; для большинства параграфов они даны «с запасом». Поэтому выбирайте их для использования на уроках и внеурочных занятиях и в качестве домашних заданий в зависимости от поставленной цели, уровня подготовки учащихся, степени дифференциации процесса обучения и т. п.

«Упражнения на повторение курса алгебры 7 класса» помогут диагностировать умения и навыки учащихся по алгебре за предыдущий год и повторить учебный материал. Дополнительные упражнения рубрики «Задания для проверки знаний» предназначены для учащихся, которые быстрее других справились с основными заданиями. Правильное их решение учитель может оценить отдельно. Упражнения для повторения разделов можно предложить учащимся во время обобщающих уроков или при повторении и систематизации учебного материала в конце учебного года. Задачи повышенной сложности и «Интересные задачки для неленивых» помогут удовлетворить интерес учащихся к предмету и поспособствуют подготовке к различным математическим соревнованиям.

Уважаемые родители!

Если ваш ребенок пропустит один или несколько уроков алгебры, обязательно предложите ему самостоятельно проработать материал этих уроков по учебнику. Сначала он должен прочитать теоретический материал, изложенный простым, доступным языком и содержащий большое количество примеров решения упражнений, а потом из предложенных в соответствующем тематическом параграфе заданий решить посильные ему упражнения.

Во время изучения ребенком курса алгебры 8 класса вы можете предлагать ему дополнительно решать дома упражнения, которые не рассматривались на уроке. Это будет способствовать лучшему усвоению учебного материала.

Каждая тема заканчивается тематическим оцениванием. Перед его проведением предложите ребенку решить задания «Домашней самостоятельной работы», представленные в тестовой форме, и «Задания для проверки знаний». Это поможет вспомнить основные типы упражнений и качественно подготовиться к тематическому оцениванию.

Глава 1
Рациональные выражения

В этой главе вы:

- **вспомните** основное свойство обыкновенной дроби и основные свойства уравнений;
- **познакомитесь** с понятиями рациональной дроби, рационального уравнения; с функцией $y = \frac{k}{x}$, степенью с целым показателем, стандартным видом числа;
- **научитесь** сокращать рациональные дроби и приводить их к новому знаменателю; выполнять арифметические действия с рациональными дробями; решать рациональные уравнения.

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

В курсе алгебры 7 класса вы уже знакомились с ***целыми рациональными выражениями***, то есть с выражениями, которые не содержат деления на выражение с переменной, например:

$$5m^2p; \quad 4c^3 + t^9; \quad (m - n)(m^2 + n^7); \quad k^9 - \frac{p + l}{4}.$$

Любое целое выражение можно представить в виде многочлена стандартного вида, например:

$$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$$

$$k^9 - \frac{p + l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$$

В отличие от целых выражений, выражения

$$5m - \frac{3}{p}; \quad \frac{x + 2}{y - 9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}; \quad \frac{1}{(x - y)(x^2 + 7)}$$

содержат деление на выражение с переменной. Такие выражения называют ***дробными рациональными выражениями***.

Целые рациональные и дробные рациональные выражения называют ***рациональными выражениями***.

> ***Рациональные выражения*** **— это математические выражения, содержащие действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем.**

Рациональное выражение вида $\dfrac{P}{Q}$, где P и Q – выражения, содержащие числа или переменные, называют ***дробью***. Выражение P – ее числитель, а Q – знаменатель. Если P и Q в дроби – многочлены, то дробь называют ***рациональной дробью***.

Целое рациональное выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных, так как при нахождении его значения выполняют действия сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля, что всегда выполнимо.

Рассмотрим дробное рациональное выражение $\dfrac{5}{x-3}$. Его значение можно найти для любого x, кроме $x = 3$, так как при $x = 3$ знаменатель дроби обращается в нуль. В этом случае говорят, что выражение $\dfrac{5}{x-3}$ имеет смысл при всех значениях переменной x, кроме $x = 3$ (или же при $x = 3$ не имеет смысла).

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных* в выражении.

Эти значения образуют ***область определения выражения***, или ***область допустимых значений переменных*** в выражении.

Пример 1. Найдите допустимые значения переменной в выражении: 1) $\dfrac{m-3}{9}$; 2) $\dfrac{5}{p+2}$; 3) $\dfrac{x+7}{x(x-9)}$; 4) $\dfrac{7}{|y|-3}$.

Решение. 1) Выражение имеет смысл при любых значениях переменной m. 2) Допустимые значения переменной p – все числа, кроме числа -2, так как это число обращает знаменатель дроби в нуль. 3) Знаменатель дроби $\dfrac{x+7}{x(x-9)}$ обращается в нуль при $x = 0$ или $x = 9$, поэтому допустимые значения переменной x – все числа, кроме чисел 0 и 9. 4) Допустимые значения переменной y – все числа, кроме 3 и -3.

Кратко ответы можно записать следующим образом:
1) m – любое число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

Рассмотрим *условие равенства дроби нулю*. Так как $\dfrac{0}{Q} = 0$, если $Q \neq 0$, то можно сделать вывод, что дробь $\dfrac{P}{Q}$ равна нулю тогда и только тогда, когда числитель P равен нулю, а знаменатель Q не равен нулю, то есть $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Пример 2. При каких значениях переменной равно нулю значение дроби:

1) $\dfrac{x-3}{x+1}$; 2) $\dfrac{(a-2)(a+1)}{a+5}$; 3) $\dfrac{b(b-7)}{b-7}$?

Решение. 1) Числитель дроби равен нулю при $x = 3$. Это значение переменной не обращает знаменатель в нуль, поэтому число 3 является значением переменной, при котором данная дробь равна нулю. 2) Числитель дроби равен нулю при $a = 2$ или $a = -1$. Для каждого из этих значений знаменатель дроби нулю не равен. Поэтому числа 2 и −1 – те значения переменной, при которых данная дробь равна нулю. 3) Числитель дроби равен нулю, если $b = 0$ или $b = 7$. При $b = 0$ знаменатель дроби нулю не равен, а при $b = 7$ знаменатель дроби обращается в нуль, то есть такой дроби не существует. Следовательно, данная дробь равна нулю только при $b = 0$.

Ответ. 1) $x = 3$; 2) $a = 2$, $a = -1$; 3) $b = 0$.

А еще раньше...

Древнегреческий математик Диофант (прибл. III в. н. э.) рассмотрел рациональные дроби и действия с ними в своей работе «Арифметика». В частности, на страницах этой книги можно встретить доказательство тождеств

$$30 \cdot \frac{144}{x^4+900-60x^2} + \frac{60}{x^2-30} = \frac{60x^2+2520}{x^4+900-60x^2}$$

и $$\frac{96}{x^4+36-12x^2} - \frac{12}{6-x^2} = \frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2},$$

записанных символикой того времени.

Выдающийся английский ученый Исаак Ньютон (1643–1727) в своей монографии «Универсальная арифметика» (1707 г.) определяет дробь следующим образом: «Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, означает часть или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю». В этой работе Ньютон рассматривает не только обычные дроби, но и рациональные.

1. Какие выражения называют целыми рациональными выражениями, а какие – дробными рациональными выражениями? Приведите примеры таких выражений.
2. Какие выражения называют рациональными?
3. Какие дроби называют рациональными дробями?
4. Что такое допустимые значения переменной?
5. Когда дробь $\dfrac{P}{Q}$ равна нулю?

1 Начальный уровень

1. (Устно.) Какие из выражений – целые, а какие – дробные:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) $m^2 + 2m - 8$; 4) $\frac{b-2}{8}$;

5) $\frac{1}{x^2 + m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2 + 7p$; 8) $a^2 + \frac{2}{a}$?

2. Из рациональных выражений $a^3 - ab$; $\frac{m}{17}$; $t(t-1) + \frac{t}{p}$; $\frac{17}{a}$; $\frac{1}{9}a - \frac{1}{8}b$; $\frac{7}{x^2+1} - 5$ выпишите: 1) целые; 2) дробные.

3. Какие из дробей являются рациональными дробями:

1) $\frac{a}{a^2 - 3}$; 2) $\frac{m\left(n + \frac{1}{k}\right)}{p^2 - 2}$; 3) $\frac{x^2 - 4x + 5}{y^2 - 9}$; 4) $\frac{\frac{x}{x+2}}{m-3}$?

2 Средний уровень

4. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3a+9}{a^2}$ при $a = 1; -2; -3$;

2) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-2}$ при $x = 4; -1$.

5. Определите фамилию выдающегося украинского авиаконструктора. Для этого найдите значения выражений из первой таблицы и перенесите соответствующие этим значениям буквы во вторую таблицу. Пользуясь любыми информационными источниками, ознакомьтесь с биографией этого авиаконструктора.

x	-3	-1	0	2	3
$\frac{1+x}{1-x}$					
Буквы	Т	В	А	О	Н

1	-2	$-0{,}5$	-3	-2	-3	0

6. Составьте дробь:

1) числителем которой является разность переменных a и b, а знаменателем – их сумма;

2) числителем которой является произведение переменных x и y, а знаменателем – сумма их квадратов.

7. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $m^2 - 5$; 2) $\dfrac{3a-5}{a}$; 3) $\dfrac{7b+9}{8}$; 4) $\dfrac{t-9}{t+1}$;

5) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{2}{x-7}$; 6) $\dfrac{p+2}{p(p-1)}$; 7) $\dfrac{3}{x^2+1}$; 8) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{|m|+5}$.

8. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $p + 9$; 2) $\dfrac{a-7}{a+4}$; 3) $\dfrac{b-9}{4}$;

4) $\dfrac{x^2-3}{x(x+2)}$; 5) $\dfrac{2y}{y-1} + \dfrac{3}{y+6}$; 6) $\dfrac{4}{m^2+2}$.

9. За t ч автомобиль проехал 240 км. Составьте выражение для вычисления скорости автомобиля (в км/ч). Найдите значение полученного выражения при $t = 3$; 4.

10. Ученик потратил 48 грн на покупку n ручек. Составьте выражение для вычисления цены ручки (в грн) и вычислите его значение при $n = 8$; 10.

3 Достаточный уровень

11. При каком значении переменной значение дроби $\dfrac{x+2}{8}$ равно:

1) -2; 2) 9; 3) 0,01; 4) $-4{,}9$?

12. При каком значении переменной значение дроби $\dfrac{m-1}{10}$ равно:

1) -8; 2) 0,25?

13. При каком значении x равна нулю дробь:

1) $\dfrac{4x-8}{x}$; 2) $\dfrac{x(x+3)}{x^2}$;

3) $\dfrac{(x-1)(x+7)}{x+5}$; 4) $\dfrac{3x-6}{8-4x}$?

14. При каком значении y равна нулю дробь:

1) $\frac{y}{5y-7}$; 2) $\frac{(y+1)y}{y^7}$; 3) $\frac{(y+2)(y-3)}{y+4}$; 4) $\frac{y+1}{5y+5}$?

15. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}$; 2) $\frac{t+2}{t^2-7t}$; 3) $\frac{m}{m^2-25}$; 4) $\frac{5}{(x-9)^2}$.

16. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}$; 2) $\frac{a+2}{5a-a^2}$; 3) $\frac{c}{4-c^2}$; 4) $\frac{a}{(a+1)^2}$.

17. Составьте выражение с переменной x, которое имело бы смысл при любых значениях x, кроме:

1) $x=2$; 2) $x=1$ и $x=-4$.

4 Высокий уровень

18. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{37}{a(a-2)-3a+6}$; 2) $\frac{x}{|x|-1}$; 3) $\frac{5m}{1-\frac{1}{m}}$; 4) $\frac{4k}{4-|k-2|}$.

19. Найдите область определения выражения:

1) $\frac{12}{x(x+2)-4x-8}$; 2) $\frac{m}{4-|m|}$; 3) $\frac{7}{\frac{1}{x}+1}$; 4) $\frac{2a}{|a+2|-3}$.

20. Определите знак дроби:

1) $\frac{x^7}{y^8}$, если $x>0$, $y<0$; 2) $\frac{m+1}{n^7}$, если $m>0$, $n<0$;

3) $\frac{|p-1|}{n^{19}}$, если $p<0$, $n>0$; 4) $\frac{|a|+1}{c^8}$, если $a<0$, $c<0$.

21. Докажите, что при любом значении переменной значение дроби:

1) $\frac{7}{a^2+1}$ положительно; 2) $\frac{4}{-p^2-2}$ отрицательно;

3) $\frac{(a+1)^2}{a^2+7}$ неотрицательно; 4) $\frac{-(p^2-4)^2}{p^4+1}$ неположительно.

132. Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Расстояние между городами равно s км, а скорости велосипедистов v_1 км/ч и v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Составьте формулу для вычисления t. Найдите значение t, если $s = 150$ км, $v_1 = 12$ км/ч, $v_2 = 13$ км/ч.

133. Известно, что $\frac{x}{y} = 3$. Найдите значение дроби:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

134. Выполните умножение:

1) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}$; 2) $\frac{3}{7} \cdot 1\frac{5}{9}$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$; 4) $7\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$.

135. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$.

Интересные задачки для неленивых

136. Для актового зала школы приобрели люстру на 31 лампочку. Директору школы нужна возможность включать любое их количество, от 1 до 31. Какое наименьшее количество обычных выключателей для этого понадобится?

Домашняя самостоятельная работа № 1

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Какое из выражений не является целым рациональным?

А. $\frac{1}{5}a^2xy$; **Б.** $\frac{m-3}{5}$; **В.** $\frac{5}{m-3}$; **Г.** $0{,}25x + y$.

2. Сократите дробь $\frac{5ax}{5xy}$.

А. $\frac{5a}{y}$; **Б.** $\frac{a}{y}$; **В.** $\frac{y}{a}$; **Г.** $\frac{a}{5y}$.

3. Выполните действие $\dfrac{m}{3} - \dfrac{5}{b}$.

А. $\dfrac{m-5}{3-b}$; **Б.** $\dfrac{3m-5b}{3b}$; **В.** $\dfrac{15-mb}{3b}$; **Г.** $\dfrac{mb-15}{3b}$.

2 **4.** Найдите допустимые значения переменной a в выражении $\dfrac{a-3}{a+2}$.

А. Любое число;
Б. любое число, кроме 3;
В. любое число, кроме −2;
Г. любое число, кроме −2 и 3.

5. Сократите дробь $\dfrac{2p+4}{p^2-4}$.

А. $\dfrac{2}{p-2}$; **Б.** $\dfrac{2}{p+2}$; **В.** $\dfrac{2}{p}$; **Г.** $\dfrac{2}{2-p}$.

6. Выполните действие $\dfrac{4m}{m-a} + \dfrac{4a}{a-m}$.

А. $\dfrac{4m+4a}{m-a}$; **Б.** 4; **В.** −4; **Г.** $\dfrac{4m+4a}{a-m}$.

3 **7.** При каких значениях x дробь $\dfrac{(3+x)(1-x)}{5x-5}$ равна нулю?

А. −3 и 1; **Б.** −3; **В.** 1; **Г.** Таких значений x нет.

8. Упростите выражение $\dfrac{2m}{m-3} + \dfrac{m}{m+3} + \dfrac{2m^2}{9-m^2}$.

А. $\dfrac{m}{m-3}$; **Б.** $\dfrac{m}{m+3}$; **В.** $\dfrac{5m^2+3m}{m^2-9}$; **Г.** $-\dfrac{1}{3}$.

9. Представьте дробь $\dfrac{m^3-m^4+3}{m^3}$ в виде суммы целого выражения и дроби.

А. $1 - \dfrac{1}{m} + \dfrac{3}{m^3}$; **Б.** $1 + \dfrac{3}{m^3}$; **В.** $1 - m + \dfrac{3}{m^3}$; **Г.** $1 - m + \dfrac{1}{m^3}$.

4 **10.** При каких значениях x выражение $\dfrac{x^2-9}{|x+1|-4}$ имеет смысл?

А. При любых;
Б. при $x \neq 3$;
В. при $x \neq -5$;
Г. при $x \neq 3$ и $x \neq -5$.

11. При каких значениях x дробь $\dfrac{x^2 - 9}{|x + 1| - 4}$ равна нулю?

А. 3; **Б.** 3 и −3; **В.** −3; **Г.** 3 и −5.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{2(x - 4y)}{(x - 2)(y - 1)} - \dfrac{x^2 - 8y}{(2 - x)(1 - y)}$ при $x = 13$, $y = 0,99$.

А. 1300; **Б.** −1300; **В.** 130; **Г.** −130.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 1–4

1 **1.** Какие из выражений – целые, а какие – дробные:

1) $\dfrac{1}{3}a^2b$; 2) $\dfrac{x - y}{x}$; 3) $\dfrac{c + 2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?

2. Сократите дробь: 1) $\dfrac{m^2}{mn}$; 2) $\dfrac{4ab}{4bc}$.

3. Выполните действие: 1) $\dfrac{a - b}{n} + \dfrac{b}{n}$; 2) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{y}$.

2 **4.** Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\dfrac{5}{x(x - 1)}$; 2) $\dfrac{2a}{a + 2} + \dfrac{1}{a - 3}$.

5. Сократите дробь:

1) $\dfrac{16am}{20bm}$; 2) $\dfrac{12am^2}{8mc}$; 3) $\dfrac{2m - 6}{m^2 - 9}$; 4) $\dfrac{ax + 2a}{x^2 + 4x + 4}$.

6. Выполните действие:

1) $\dfrac{3a}{a - b} + \dfrac{3b}{b - a}$; 2) $\dfrac{5x + y}{x^2y} + \dfrac{x - 5y}{xy^2}$.

3 **7.** Упростите выражение $\dfrac{2b}{b - 4} + \dfrac{b}{b + 4} + \dfrac{2b^2}{16 - b^2}$.

8. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

1) $\dfrac{c^2 - c^3 + 5}{c^2}$; 2) $\dfrac{p^2 - p - 2}{p - 1}$.

4 **9.** Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 4x}{16 - 4x}$.

Дополнительные задания

10. Найдите: 1) область определения выражения $\frac{x^2-16}{|x+1|-5}$;

2) значения x, при которых дробь $\frac{x^2-16}{|x+1|-5}$ равна нулю.

11. Упростите выражение $\frac{3(a-2b)}{(a-3)(b-4)} - \frac{a^2-6b}{(3-a)(4-b)}$.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ. ВОЗВЕДЕНИЕ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Напомним, что произведением двух обыкновенных дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей данных дробей:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}.$$

Докажем, что это равенство является тождеством для любых значений a, b, c и d при условии, что $b \neq 0$ и $d \neq 0$.

Пусть $\frac{a}{b} = p$, $\frac{c}{d} = q$. Тогда по определению частного $a = bp$, $c = dq$. Поэтому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Так как $bd \neq 0$, то, снова учитывая определение частного, получим: $pq = \frac{ac}{bd}$. Следовательно, если $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Сформулируем *правило умножения дробей*.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить отдельно числители и отдельно знаменатели сомножителей и записать первый результат в числителе, а второй – в знаменателе произведения дробей.

Пример 1. Выполните умножение $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2}$.

Решение. $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2} = \frac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \frac{4b^2}{3m}$.

Ответ. $\frac{4b^2}{3m}$.

Задачи повышенной сложности

Рациональные выражения

1060. Докажите, что для положительных значений a и b $(a \neq b)$ значения дроби $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$ больше соответствующих значений дроби $\dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$.

1061. Сократите дробь $\dfrac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^3 + n^3}$.

1062. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y + z}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y + z}} \cdot \left(1 + \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right) : \dfrac{x - y - z}{xyz}$;

2) $\dfrac{\dfrac{m - n}{2m - n} - \dfrac{m^2 + n^2 + m}{2m^2 + mn - n^2}}{(4n^4 + 4mn^2 + m^2) : (2n^2 + m)} \cdot (n^2 + n + mn + m)$;

3) $\dfrac{4}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}} : \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y}} - \dfrac{4}{y(xyz + x + z)}$;

4) $\left(\left(\dfrac{a}{b - a}\right)^{-2} - \dfrac{(a + b)^2 - 4ab}{a^2 - ab}\right)^2 \cdot \dfrac{a^4}{a^2b^2 - b^4}$;

5) $\dfrac{p^{-6} - 64}{4 + 2p^{-1} + p^{-2}} \cdot \dfrac{p^2}{4 - 4p^{-1} + p^{-2}} - \dfrac{4p^2(2p + 1)}{1 - 2p}$;

6) $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-3} + y^{-3}} : \dfrac{x^2y^2}{(x + y)^2 - 3xy} \cdot \left(\dfrac{x^2 - y^2}{xy}\right)^{-1}$.

1063. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\left(x^2 - \dfrac{1}{y^2}\right)^x \cdot \left(y + \dfrac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^y \cdot \left(x - \dfrac{1}{y}\right)^{x-y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$;

2) $\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right)=\dfrac{(b+c-a)^2}{2bc}$;

3) $\dfrac{(x-y)^2+xy}{(x+y)^2-xy}:\dfrac{x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2}{(x^3+y^3+x^2y+xy^2)(x^3-y^3)}=x-y$;

4) $\left(\dfrac{2-y}{y-1}+\dfrac{2(x-1)}{x-2}\right):\left(\dfrac{y(x-1)}{y-1}+\dfrac{x(2-y)}{x-2}\right)=\dfrac{1}{x-y}$.

1064. Докажите одно из тождеств выдающегося математика Л. Эйлера (1707–1783):

$$\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3-\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=a^3+b^3.$$

1065. Докажите, что значение выражения

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}$$

является отрицательным при любом значении $a>1$.

1066. Докажите, что если $x+y=1$, то

$$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{2(y-x)}{x^2y^2+3}.$$

1067. Докажите, что если для чисел x, y, z, m, n, p справедливы равенства $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$ и $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}+\dfrac{p}{z}=0$, то для них справедливо и равенство $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1$.

1068. Докажите, что если $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$, то $a^2b^2c^2=1$ или $a=b=c$.

1069. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $\dfrac{x-2}{x-a}=0$;
2) $\dfrac{x-a}{x^2-1}=0$;
3) $(a-2)x=a^2-4$;
4) $(a^2-1)x=a^2-2a+1$.

1070. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{2x}=\dfrac{2x+a}{2a}-\dfrac{a}{x}$;
2) $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{a}{b}$;
3) $\dfrac{x-a}{a}-\dfrac{x}{x-a}=\dfrac{x+a}{a}$;
4) $\dfrac{3}{x-a}+\dfrac{2}{x+a}=\dfrac{4x+7a}{x^2-a^2}$.

1071. Порядок числа a равен -3, а порядок числа b равен 5. Каким может быть порядок числа:

1) ab; 2) $\frac{a}{b}$; 3) $\frac{b}{a}$; 4) $a + b$?

Квадратные корни. Действительные числа

1072. Решите относительно переменной x уравнение:

1) $\sqrt{x} = a + 3$; 2) $a\sqrt{x} = a$; 3) $(a + 3)\sqrt{x + 2} = a^2 - 9$.

1073. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения:

1) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})x + 4 = 0$; 2) $(5\sqrt{2} + 7\sqrt{5})x = 13 + 2\sqrt{3}$.

1074. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{6 - \sqrt{25 - 4\sqrt{6}}}}$;

3) $\sqrt{\left|30\sqrt{3} - 52\right| - \sqrt{52 + 30\sqrt{3}}}$.

1075. Упростите выражение:

1) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$;

2) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$.

1076. Вычислите:

1) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$;

2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

1077. Постройте график функции:

1) $y = 4x - \sqrt{x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - x$.

1078. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{(1 + \sqrt{3})^2 - 7}{\sqrt{7} + \sqrt{3} + 1}$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}}$; 4) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАССОВ И АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

Десятичные дроби

Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют поразрядно, записывая их одна под другой так, чтобы запятая размещалась под запятой.

Примеры. 1) $\begin{array}{r} +\,7{,}813 \\ 9{,}4 \\ \hline 17{,}213 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -\,12{,}47 \\ 5{,}893 \\ \hline 6{,}577 \end{array}$

Чтобы *перемножить две десятичные дроби*, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятые, а потом в произведении отделить запятой справа налево столько цифр, сколько их после запятой в обоих множителях вместе.

Примеры. 1) $\begin{array}{r} \times\,4{,}07 \\ 2{,}9 \\ \hline +\,3663 \\ 814 \\ \hline 11{,}803 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times\,0{,}017 \\ 0{,}9 \\ \hline 0{,}0153 \end{array}$

Чтобы *разделить десятичную дробь на натуральное число*, надо выполнить деление, не обращая внимания на запятую, но после окончания деления целой части делимого нужно в частном поставить запятую.

Примеры. 1) $\begin{array}{r|l} -\,42{,}84 & 12 \\ \cline{2-2} 36 & 3{,}57 \\ \cline{1-1} -\,68 & \\ 60 & \\ \cline{1-1} -\,84 & \\ 84 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$ 2) $\begin{array}{r|l} -\,0{,}024 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}0048 \\ \cline{1-1} -\,40 & \\ 40 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

Чтобы *разделить десятичную дробь на десятичную*, нужно в делимом и делителе перенести запятую на столько цифр вправо, сколько их стоит после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число.

Пример. $12{,}1088 : 2{,}56 = 1210{,}88 : 256 = 4{,}73$.

Обычные дроби

Частное от деления числа a на число b можно записать в виде *обычной дроби* $\frac{a}{b}$, где a – *числитель дроби*, b – ее *знаменатель*.

Основное свойство дроби: значение дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же натуральное число.

Примеры. 1) $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$ (сократили дробь $\frac{15}{20}$ на 5);

2) $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ (привели дробь $\frac{3}{7}$ к знаменателю 14).

Дроби с одинаковыми знаменателями складывают и вычитают по формулам:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Примеры. 1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$; 2) $\frac{17}{19} - \frac{3}{19} = \frac{14}{19}$;

3) $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{5} = 9\frac{4}{5}$; 4) $7\frac{5}{11} - 2\frac{2}{11} = 5\frac{3}{11}$.

Чтобы *сложить или вычесть дроби с разными знаменателями,* их сначала приводят к общему знаменателю, а затем выполняют действие по правилу сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Примеры. 1) ${}^{5/}\frac{1}{6} + {}^{3/}\frac{3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$;

2) ${}^{3/}\frac{7}{8} - {}^{2/}\frac{5}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$.

На следующих примерах показано, как выполнить *сложение и вычитание смешанных чисел*.

Примеры. 1) $5\,{}^{4/}\frac{1}{3} + 2\,{}^{3/}\frac{3}{4} = 7\frac{4+9}{12} = 7\frac{13}{12} = 8\frac{1}{12}$;

2) $7\,{}^{4/}\frac{4}{5} - 6\,{}^{5/}\frac{3}{4} = 1\frac{16-15}{20} = 1\frac{1}{20}$;

3) $5\,{}^{2/}\frac{4}{9} - 2\,{}^{3/}\frac{5}{6} = 3\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 2\frac{26-15}{18} = 2\frac{11}{18}$.

Чтобы *умножить две дроби*, нужно перемножить их числители и их знаменатели и первый результат записать числителем произведения, а второй – знаменателем:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

П р и м е р ы. 1) $\frac{5}{8} \cdot \frac{14}{15} = \frac{{}^{1}\cancel{5} \cdot \cancel{14}^{7}}{{}_{4}\cancel{8} \cdot \cancel{15}_{3}} = \frac{7}{12}$;

2) $7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$;

3) $2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{{}^{1}\cancel{7} \cdot \cancel{30}^{10}}{{}_{1}\cancel{3} \cdot \cancel{7}_{1}} = \frac{10}{1} = 10.$

Чтобы *разделить одну дробь на другую,* нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

П р и м е р ы. 1) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$;

2) $2\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{7}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$

Положительные и отрицательные числа

Модулем числа называют расстояние от начала отсчета до точки, изображающей это число на координатной прямой.

Модуль положительного числа и числа нуль – само это число, а модуль отрицательного – противоположное ему число:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

П р и м е р ы. $|3| = 3$; $|-2| = 2$; $|0| = 0$; $|\pi| = \pi$; $\left|-2\frac{1}{7}\right| = 2\frac{1}{7}$.

Чтобы *сложить два отрицательных числа*, нужно сложить их модули и перед полученным результатом записать знак «–».

П р и м е р. $-3 + (-7) = -10$.

Чтобы *сложить два числа с разными знаками*, нужно из большего модуля слагаемых вычесть меньший модуль и перед полученным результатом записать знак слагаемого с большим модулем.

П р и м е р ы. 1) $-5 + 5 = 0$; 2) $7 + (-3) = 4$;
3) $-9 + 5 = -4$.

Чтобы *из одного числа вычесть другое*, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ