Уважаемые учащиеся!

В этом году вы продолжите изучать одну из важнейших математических дисциплин – алгебру. Поможет вам в этом учебник, который вы держите в руках.

При изучении теоретического материала обращайте внимание на текст, выделенный **жирным** шрифтом. Его надо запомнить.

Обращайте внимание и на условные обозначения:

– надо запомнить; – упражнения для повторения;

– вопросы и задания к параграфам;

– рубрика «Решите и подготовьтесь к изучению нового материала»;

1 – задание для классной работы; **2** – для домашней работы;

– рубрика «Математика вокруг нас»;

– рубрика «Интересные задачки для неленивых» и дополнительный материал;

1 – упражнения начального уровня;

2 – среднего уровня; 3 – достаточного уровня;

4 – высокого уровня; ★ – повышенной сложности.

Проверить свои знания и подготовиться к тематическому оцениванию можно, выполняя задания «Домашней самостоятельной работы» и «Задания для проверки знаний». В конце каждой главы есть упражнения для ее повторения, а в конце учебника – «Задания для проверки знаний по курсу алгебры 9 класса». «Задачи повышенной сложности» помогут подготовиться к математической олимпиаде и углубить знание математики. В учебнике также есть пример варианта аттестационной письменной работы.

Изученный в школе теоретический материал обязательно прорабатывайте дома.

В учебнике имеется большое количество упражнений. Большинство из них вы рассмотрите на уроках и выполняя домашнюю работу, остальные рекомендуем вам выполнить самостоятельно.

Интересные факты из истории математики, о ее становлении и развитии как науки вы найдете в рубрике «А еще раньше...».

Уважаемые учителя!

Предлагаемый учебник содержит много упражнений; в большинстве параграфов упражнения представлены «с запасом». Поэтому в зависимости от поставленной цели, уровня подготовки учащихся, степени дифференциации учебного процесса и т.п. используйте их на уроках, во внеурочной работе и в качестве домашнего задания.

Дополнительные упражнения рубрики «Задания для проверки знаний» предназначены для учащихся, которые на уроке раньше других справились с основными заданиями. Правильность их решения учитель может оценить отдельно. Упражнения для повторения глав можно предложить учащимся на обобщающих уроках или при повторении и систематизации учебного материала в конце учебного года. В конце учебника представлен образец варианта аттестационной письменной работы. Задачи повышенной сложности и «Интересные задачки для неленивых» смогут удовлетворить повышенный интерес учащихся к предмету и будут способствовать их подготовке к различным математическим соревнованиям.

Уважаемые родители!

Если ваш ребенок пропустил один или несколько уроков алгебры, предложите ему самостоятельно проработать этот материал по учебнику. Сначала ему нужно будет прочитать теоретический материал, изложенный простым доступным языком и содержащий много примеров решения заданий, а затем – выполнить посильные ему упражнения из предложенных в соответствующем тематическом параграфе.

При изучении курса алгебры 9 класса вы можете предлагать ребенку дополнительно решать дома упражнения, которые не рассматривались на уроке. Это поможет ему лучше усваивать материал.

Изучение каждой темы завершается тематическим оцениванием. Перед его проведением предложите ребенку выполнить задания «Домашней самостоятельной работы», представленные в форме теста, и «Задания для проверки знаний». Это поможет ему освежить в памяти основные типы упражнений и качественно подготовиться к тематическому оцениванию.

Глава 1
Неравенства

В этой главе вы:
- **вспомните** числовые неравенства, двойные неравенства;
- **познакомитесь** с понятиями объединения и пересечения множеств, линейными неравенствами с одной переменной и их системами;
- **узнаете** о свойствах числовых неравенств;
- **научитесь** решать линейные неравенства с одной переменной и системы линейных неравенств с одной переменной.

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В предыдущих классах вы научились сравнивать всевозможные числа и записывать результат их сравнения в виде равенства или неравенства с помощью знаков =, >, <. Например, $0{,}4 = \frac{2}{5}$; $-2 > -11$; $5 < 7$. Выражение, записанное слева от знака неравенства, называют *левой частью неравенства*, а выражение, записанное справа, – *правой частью неравенства*. Так, в последнем неравенстве левой частью неравенства является число 5, а правой – число 7.

Неравенство, обе части которого – числа, называют *числовым неравенством*. Например,

$$1{,}2 > -0{,}8;\ \sqrt{2} < 2;\ 0{,}1 < \frac{1}{9};\ \sqrt{7} + 2 > \sqrt{8}.$$

Для любых двух чисел a и b имеет место одно и только одно из соотношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$. Ранее в зависимости от вида чисел (натуральные числа, десятичные дроби, обычные дроби с одинаковыми или разными знаменателями) мы использовали то или иное правило сравнения чисел. Удобнее было бы иметь универсальное правило сравнения.

Известно, что $5 > 2$. Рассмотрим разность левой и правой частей этого неравенства: $5 - 2 = 3 > 0$, разность положительна. Рассматривая разность левой и правой частей неравенства $3 < 7$, получаем: $3 - 7 = -4 < 0$, разность отрицательна. Рассматривая в равенстве $4 = 4$ разность левой и правой частей, получим, что разность равна нулю: $4 - 4 = 0$.

Приходим к *определению сравнения чисел*.

> **$a > b$, если $a - b > 0$;**
> **$a < b$, если $a - b < 0$;**
> **$a = b$, если $a - b = 0$.**

Пример 1. Сравнить $\frac{5}{9}$ и 0,6.

Решение. Рассмотрим разность чисел $\frac{5}{9}$ и 0,6:

$$\frac{5}{9} - 0{,}6 = \frac{5}{9} - \frac{3}{5} = \frac{25 - 27}{45} = -\frac{2}{45} < 0.$$

Разность отрицательна, значит $\frac{5}{9} < 0{,}6$.

Ответ. $\frac{5}{9} < 0{,}6$.

Напомним, что на координатной прямой точка, соответствующая меньшему числу, лежит левее точки, соответствующей большему числу. На рисунке 1 точка, соответствующая числу m, лежит левее точки, соответствующей числу n, поэтому $m < n$.

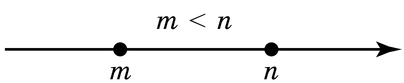


Рис. 1

Числовые неравенства бывают *верные* и *неверные*.

Например, $\frac{5}{9} < 0{,}6$; $\sqrt{2} > 1$ – верные числовые неравенства, $1{,}8 > 2$; $\frac{3}{8} < -0{,}1$ – неверные числовые неравенства.

Кроме знаков $>$ и $<$, называемых *знаками строгого неравенства*, в математике также используют знаки $\leqslant$ (читают: «меньше или равно» или «не больше») и $\geqslant$ («больше или равно» или «не меньше»). Знаки $\geqslant$ и $\leqslant$ называют *знаками нестрогого неравенства*. Неравенства, которые содержат знак $>$ или $<$, называют *строгими неравенствами*, а те, которые содержат знак $\geqslant$ или $\leqslant$, – *нестрогими неравенствами*.

Из определения соотношений «больше», «меньше» и «равно» получаем, что $a \geqslant b$, если $a - b \geqslant 0$, и $a \leqslant b$, если $a - b \leqslant 0$.

Рассмотрим, как с помощью определения сравнения чисел можно *доказывать неравенства*.

Пример 2. Доказать, что при любом значении a имеет место неравенство $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и упростим ее:

$(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) = a^2 - 6a + 9 - (a^2 - 2a - 4a + 8) = a^2 - 6a + 9 - a^2 + 6a - 8 = 1 > 0$.

Так как $(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) > 0$ при любом значении a, то при любом значении a имеет место неравенство $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$, что и требовалось доказать.

Условие для примера 2 можно было сформулировать проще, например: доказать неравенство $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Пример 3. Доказать неравенство $2(x - 8) \leqslant x(x - 6)$.

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и упростим ее:

$2(x - 8) - x(x - 6) = 2x - 16 - x^2 + 6x = -x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16) = -(x - 4)^2$.

Так как $(x - 4)^2 \geqslant 0$ при любом значении x, то $-(x - 4)^2 \leqslant 0$. Следовательно, по определению, неравенство $2(x - 8) \leqslant x(x - 6)$ верно при любом x, что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать неравенство $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$.

Доказательство. В левой части неравенства выделим квадраты двучленов:

$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 15 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2$.

При любых значениях x и y: $(x + 2)^2 \geqslant 0$ и $(y - 3)^2 \geqslant 0$.

А значит, $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 0$, а $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2 > 0$.

Следовательно, $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$, что и требовалось доказать.

Напомним, что число $\dfrac{a + b}{2}$ называют *средним арифметическим чисел* a и b. Для неотрицательных чисел a и b число $\sqrt{ab}$ называют их *средним геометрическим*.

Пример 5. Доказать, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел a и b не меньше их среднего геометрического (*неравенство Коши*):

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее, учитывая, что $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Получим:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}=$$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$ для любых $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$. Следовательно, $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ при любых $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Отметим, что знак равенства в неравенстве Коши возможен тогда и только тогда, когда $a=b$. Если $a\neq b$, то $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

А еще раньше...

Понятия «больше» и «меньше» появились одновременно с понятием «равно». Еще с древних времен в практической деятельности человека возникла потребность сравнивать количество предметов, длины отрезков, площади участков и т. п. Так, например, несколько неравенств присутствует в выдающемся труде «Начала» древнегреческого математика Евклида (ок. 356–300 до н. э.). В частности, там он доказывает неравенство $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ геометрическим методом для положительных чисел a и b.

Чтобы оценить отношение длины круга C к его диаметру d (позже названное числом π), другой древнегреческий физик и математик Архимед (ок. 287–212 до н. э.) использовал неравенство: $3\dfrac{10}{71}<\dfrac{C}{d}<3\dfrac{1}{7}$.

Привычные нам символы для записи неравенств появились лишь в XVII–XVIII в. Знаки $>$ и $<$ впервые использовал английский математик Томас Харриот (1560–1621) в работе «Практика аналитического искусства», опубликованной в 1631 году, а знаки $\geqslant$ и $\leqslant$ – в 1734 году французский математик и астроном Пьер Бугер (1698–1758).

Кроме неравенства Коши отметим еще и такие известные неравенства:

1) Неравенство *Бернулли*.

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x,\ \text{где } x\geqslant -1,\ \alpha \text{ – целое число.}$$

2) Неравенство *Чебышёва*.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – положительные числа, причем $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$, $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$.

3) Неравенство *Коши–Буняковского*.

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – любые числа.

Последнее неравенство доказали французский математик *О. Л. Коши* (1789–1857) и наш земляк *В. Я. Буняковский*.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) родился в г. Бар (сейчас – Винницкая обл.). Учился по большей части за рубежом, в основном во Франции, где его ближайшим наставником был сам Коши. В 1825 году в Парижском университете Буняковский защитил диссертацию и получил степень доктора наук. Его исследования касались области прикладной математики и математической физики. В 1826 году он переезжает из Парижа в Петербург и начинает преподавать математику и механику в известных на то время учебных заведениях, одновременно занимаясь переводом работ Коши с французского.

1. Назовите левую и праву части неравенства $-5 > -10$.
2. Приведите примеры числовых неравенств.
3. Сформулируйте определение сравнения чисел.
4. Какие неравенства называют строгими? Нестрогими?
5. Сформулируйте и докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел (неравенство Коши).

1 Начальный уровень

1. Сравните числа:

1) $0,8$ и $0,7$; 2) $-1,2$ и $-1,25$; 3) $1\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3}$;

4) $-\frac{4}{7}$ и $-\frac{3}{7}$; 5) π и 3; 6) $-2,31$ и 0.

2. Сравните числа:

1) $1,8$ и $1,9$; 2) $-1,3$ и $-1,27$; 3) $\frac{4}{5}$ и $2\frac{4}{5}$;

4) $-\frac{5}{8}$ и $-\frac{7}{8}$; 5) 4 и π; 6) 0 и $-3,71$.

3. (*Устно*). Верно ли неравенство:

1) $2,7 > -3,1$; 2) $0,5 < -3,17$; 3) $7,8 > 7,08$;

4) $4,1 < 4\frac{1}{10}$; 5) $-7,1 > -7,19$; 6) $5,05 < 5,5$?

4. Сравните числа a и b, если:

1) $a - b = 5$; 2) $a - b = 0$; 3) $a - b = -7$.

5. Сравните числа m и n, если разность $m - n$ равна:

1) -18; 2) $1,7$; 3) 0.

2 Средний уровень

6. Какое из чисел x или y меньше, если:

1) $x + 4 = y$; 2) $y - 2 = x$; 3) $y + 2 = x$; 4) $x - 3 = y$?

7. Какое из чисел a или b больше, если:

1) $a - 7 = b$; 2) $a + 3 = b$; 3) $b + 2 = a$; 4) $b - 5 = a$?

8. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам m, n и p, если $m < n$ и $p > n$.

9. Запишите в порядке возрастания числа:

$$\frac{4}{5};\ -\frac{3}{7};\ -0{,}1;\ 0;\ \frac{3}{8};\ -1{,}2;\ 0{,}7.$$

10. Запишите в порядке убывания числа:

$$-1{,}2;\ \frac{3}{4};\ 0;\ -0{,}99;\ 0{,}8;\ -0{,}6;\ 0{,}51.$$

11. Какие из следующих неравенств верны при любых значениях x:

1) $x^2 > 0$; 2) $x^2 \geqslant 0$; 3) $x + 1 > 0$;
4) $x^2 + 1 > 0$; 5) $(x - 3)^2 \geqslant 0$; 6) $(x + 4)^2 > 0$;
7) $x > -x$; 8) $-x \leqslant x$.

12. Докажите неравенство:

1) $3m + 5 > 3(m - 1)$; 2) $p(p - 2) < p^2 - 2p + 7$;
3) $(a + 1)(a - 1) < a^2$; 4) $x(x + 2) > 2x - 1$.

13. Докажите неравенство:

1) $2a - 3 < 2(a - 1)$; 2) $c(c + 2) > c^2 + 2c - 3$;
3) $(x + 2)(x - 2) + 5 > x^2$; 4) $3m - 2 < m(m + 3)$.

14. Докажите неравенство:

1) $x^2 + y^2 \geqslant -2xy$; 2) $p(p - 6) \geqslant -9$;
3) $a(a + b) \geqslant ab$; 4) $m^2 + 5m + 4 \geqslant m$.

15. Докажите неравенство:

1) $m^2 + n^2 \geqslant 2mn$; 2) $t(t + 2) \geqslant -1$;
3) $c(c - d) \geqslant -cd$; 4) $p^2 - 11p + 36 \geqslant p$.

3 Достаточный уровень

16. Сравните числа:

1) $\sqrt{5} - 2$ и $\dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}$; 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

17. Сравните числа:

1) $\sqrt{3} - 1$ и $\dfrac{1}{\sqrt{3} + 1}$; 2) $4 + \sqrt{15}$ и $\dfrac{1}{4 - \sqrt{15}}$.

18. Докажите неравенство:

1) $a^2 + 10a + 26 > 0$; 2) $8a < a^2 + 20$.

19. Докажите неравенство:

1) $b^2 - 4b + 7 > 0$; 2) $-2b < b^2 + 2$.

20. Пусть x – произвольное число. Сравните с нулем значение выражения:

1) $x^2 + 5$; 2) $-(x - 1)^2 - 3$; 3) $(x - 7)^2$;
4) $-(x + 9)^2$; 5) $9 + (x - 1)^2$; 6) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2$.

21. Докажите, что: 1) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geqslant 0$ при $x \geqslant 3$;

2) $\dfrac{3}{a + 3} > \dfrac{1}{a + 1}$, если $a > 0$.

22. Докажите, что: 1) $m^3 + m^2 + 5m + 5 \geqslant 0$ при $m \geqslant -1$;

2) $\dfrac{p}{p + 7} < \dfrac{p + 1}{p + 8}$, если $p > 0$.

4 Высокий уровень

23. Докажите неравенство:

1) $m^2 + 4m + p^2 + 2p + 5 \geqslant 0$;
2) $a^2 + b^2 \geqslant 4(a + b) - 8$;
3) $m^2 + n^2 + 1 \geqslant m + n + mn$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 > 2(a + b + c) - 4$.

24. Для каждого положительного значения a докажите, что:

1) $a^3 + 2a^2 + a > 0$; 2) $a^3 + 1 \geqslant a^2 + a$;
3) $(a + 1)^3 \leqslant 4(a^3 + 1)$; 4) $a^6 - a^5 + a^4 > 0$.

25. Для каждого отрицательного значения p докажите, что:

1) $p^3 + 10p^2 + 25p \leqslant 0$;

2) $1 - p^3 > p - p^2$.

26. Докажите, что:

1) $\dfrac{7a}{2b} + \dfrac{8b}{7a} \geqslant 4$, где a и b – числа одного и того же знака;

2) $\dfrac{3m}{5n} + \dfrac{5n}{12m} \leqslant -1$, где m и n – числа разных знаков.

323. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 6, \\ x > a. \end{cases}$

324. Найдите значения a, при которых один из корней уравнения $x^2 + x + (a - a^2) = 0$ меньше нуля, а другой – больше 0,5.

325. Найдите, при каких значениях a оба корня квадратного уравнения $6x^2 + (5a + 2)x + (a^2 + a) = 0$ принадлежат промежутку $[-4; 0]$.

326. Количество единиц некоторого двузначного числа на 1 больше количества его десятков. Найдите это число, если оно больше 45, но меньше 66.

Фискальная математика[1]

Государственный бюджет Украины – это план формирования и использования финансовых ресурсов для обеспечения задач и функций государства, которые оно осуществляет через органы государственной власти и местного самоуправления в течение бюджетного периода. Основным источником формирования госбюджета, в частности наполнения его *доходной части*, являются налоги.

Налоги – это обязательные платежи, которые физические и юридические лица должны перечислять в государственный бюджет. Размер и сроки уплаты налогов устанавливаются законодательно и периодически пересматриваются. Размер налоговых начислений (*ставка налога*) может устанавливаться как в процентах, так и в абсолютной сумме. Наиболее весомыми для доходной части бюджета являются *налог на добавленную стоимость* (НДС) и *единый социальный взнос* (ЕСВ). НДС платит покупатель по ставке 20 % от стоимости товара (услуги), но учет и перечисление НДС в государственный бюджет осуществляет продавец (налоговый агент). ЕСВ взимается с работодателей по ставке 22 % от фонда заработной платы[2]. Доходная часть государственного бюджета также зависит и от других видов налогов, в частности, налога на доходы физических лиц, акцизного налога, пошлины, налога на прибыль предприятий, транспортного и земельного налогов и т. п. (найдите детальную информацию о разных видах налогов в Украине самостоятельно).

---

[1] Та, что имеет отношение к налоговой политике государства.

[2] Ставки налогов указаны по состоянию на 2017 год.

Попробуйте самостоятельно решить несколько задач, связанных с налогообложением.

1. В Украине в 2015 году налогообложению подлежали 15 888 автомобилей, а в 2016 году – 138 249 автомобилей. Ставка транспортного налога на каждый автомобиль составляла 25 000 грн в год. Насколько больше поступлений за счет транспортного налога получил государственный бюджет Украины в 2016 году по сравнению с 2015 годом?

2. Ставка налога на землю составляет 3,66 грн за 1 м^2, но в некоторых населенных пунктах этот налог может начисляться с определенным коэффициентом, например: в курортной местности Карпат, вдоль побережий Черного и Азовского морей, в густонаселенных областных центрах и т. п. Насколько большим будет размер земельного налога в Киеве по сравнению с Одессой за земельный участок площадью 250 м^2, если в Киеве и Одессе для ставки земельного налога действуют коэффициенты повышения: 3 – для Киева и 2 – для Одессы?

3. За использованный в садовом домике газ семья Петренко уплатила сумму, указанную в договоре с предприятием, предоставляющим услуги газоснабжения. НДС при этом составил 134 грн. Какая сумма (без НДС) указана в договоре газоснабжения садового домика этой семьи?

4. Семья Ковальчуков за ноябрь 2016 года получила от Укртелекома счет на сумму 48 грн. Сколько средств будет перечислено в качестве НДС после оплаты этого счета?

5. Военный сбор в 2016 году составил 1,5 % от заработной платы. В семье из трёх человек работают все. Заработная плата отца составляет 5400 грн, матери – 4800 грн, а сына – 4200 грн. Какую общую сумму военного сбора уплатят члены этой семьи за месяц? Какую общую сумму военного сбора уплатит семья в течение всего 2016 года, если их зарплата за это время не менялась?

6. Уплатив 18 % налога на доходы физических лиц и 1,5 % военного сбора со своей заработной платы, охранник супермаркета получил 4508 грн. Каков размер заработной платы у охранника? Сколько ЕСВ ежемесячно перечисляет владелец этого супермаркета в государственный бюджет за службу охраны, если в ней работают три охранника и начальник охраны, заработная плата которого в 1,2 раза больше заработной платы охранника?

Глава 2

Квадратичная функция

В этой главе вы:
- **познакомитесь** с квадратичной функцией;
- **узнаете**, что такое нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастания и убывания функции; наибольшее и наименьшее значения функции;
- **научитесь** выполнять преобразования графика функции; строить график квадратичной функции; решать квадратные неравенства и системы двух уравнений второй степени с двумя переменными.

§ 8. ФУНКЦИЯ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ И ГРАФИК ФУНКЦИИ

В 7 классе вы начали изучать одно из важнейших математических понятий – понятие функции.

Напомним, что

***функцией* (или *функциональной зависимостью*) называют такую зависимость, при которой каждому значению независимой переменной из некоторого множества соответствует единственное значение зависимой переменной.**

Независимую переменную еще называют ***аргументом***, а о зависимой переменной говорят, что она является ***функцией*** этого аргумента (или просто функцией). Например, если $y = x^2 + 2x - 3$, то y является функцией аргумента x.

Зависимость переменной y от переменной x записывают в виде: $y = f(x)$ (читают: «y равно f от x»). Символом $f(x)$ обозначают значение функции для значения аргумента, равного x.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 5x + 2$. Можно записать, что $f(x) = 5x + 2$. Найдем, например, значение функции для $x = -3$, то есть найдем $f(-3)$. Имеем: $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 2 = -13$. Найдем значение этой функции в точках, которые равны 0; a; $b - 1$. Получим:

$$f(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2;$$
$$f(a) = 5a + 2;$$
$$f(b - 1) = 5(b - 1) + 2 = 5b - 3.$$

Отметим, что в записи $y = f(x)$ вместо f можно использовать и другие буквы: g, φ, ψ и т. п.

Все значения, которые принимает независимая переменная (аргумент), образуют *область определения функции*.

Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *область значений функции*.

***Наибольшим значением функции* называют наибольшее число из области значений функции, а *наименьшим значением функции* — соответственно наименьшее такое число.**

Область определения функции $y = f(x)$ обычно обозначают $D(f)$, а область значений — $E(f)$.

Если функция задана формулой и при этом не указана ее область определения, то будем считать, что эта область состоит из всех значений аргумента, при которых формула функции имеет смысл.

Пример 2. Найти область определения функции:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; 2) $g(x) = \dfrac{1}{x-8}$.

Решение. 1) Выражение $x^2 - 2x + 3$ имеет смысл при любом значении x, поэтому область определения функции — множество всех чисел, т. е. промежуток $(-\infty; +\infty)$.

2) Выражение $\dfrac{1}{x-8}$ имеет смысл при любом x, кроме числа 8, поэтому областью определения функции является множество $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Ответ. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Ответ можно было записать еще и так:
1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 2) $D(g) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Пример 3. Найти область определения и область значений функции: 1) $f(x) = 2 - x^2$; 2) $g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

Решение. 1) Областью определения функции $f(x)$ будет промежуток $(-\infty; +\infty)$. Чтобы найти область значений функции, оценим выражение $2 - x^2$ для всех значений x. Имеем:

$$x^2 \geqslant 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$
$$-x^2 \leqslant 0 \quad \Big| + 2$$
$$2 - x^2 \leqslant 2.$$

Таким образом, $f(x) \leqslant 2$ при любом значении x, то есть областью значений функции $f(x)$ будет промежуток $(-\infty; 2]$.

2) Область определения функции $g(x)$ состоит из таких значений x, при которых выражения $x - 2$ и $2 - x$ одновременно принимают неотрицательные значения. Следовательно, чтобы найти эти значения, надо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 2 - x \geqslant 0; \end{cases} \text{ откуда получим, что } \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Очевидно, что решением системы является число 2, а значит, область определения функции $g(x)$ содержит лишь число 2. Чтобы найти область значений этой функции, достаточно вычислить $g(2)$. Имеем: $g(2) = \sqrt{2-2} + \sqrt{2-2} = 0$.

О т в е т. 1) $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$, $E(f) = (-\infty;\ 2]$; 2) $D(g) = \{2\}$, $E(g) = \{0\}$.

Отметим, что наибольшим значением функции $f(x) = 2 - x^2$ является число 2, а наименьшего значения у нее не существует.

Напомним, что

графиком функции **называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.**

Пример 4. Построить график функции $f(x) = |x|$. По графику найти наибольшее и наименьшее значения функции.

Р е ш е н и е. Областью определения функции $f(x) = |x|$ является множество всех чисел. По определению модуля числа имеем: $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Следовательно, функцию $f(x) = |x|$ можно записать в виде:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции на промежутке $[0;\ +\infty)$ совпадает с графиком функции $y = x$, а на промежутке $(-\infty;\ 0]$ – с графиком функции $y = -x$.

График функции $f(x) = |x|$ изображен на рисунке 34. Очевидно, что наименьшим значением этой функции является число 0, а наибольшего значения не существует.

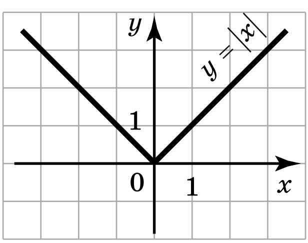


Рис. 34

О т в е т. Наименьшее значение функции – 0, наибольшего не существует.

Упражнения для повторения

382. Сравните числа:

1) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$; 2) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7}$ и 8.

383. Решите неравенство:

1) $\frac{2-x}{10}+\frac{3-x}{5}<\frac{5x-3}{4}$; 2) $3<\frac{1-2x}{3}\leqslant 7$.

384. Из Херсона в Житомир выехали одновременно два автомобиля. Один из них двигался со скоростью на 10 км/ч больше, чем другой, а потому прибыл в Житомир на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого автомобиля, если расстояние между городами равно 560 км.

385. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-5x+c=0$ удовлетворяют условию $3x_1=2x_2$. Найдите эти корни и коэффициент c.

Математика вокруг нас

386. У Богдана на счету в мобильном телефоне было 42 грн, а после звонка Алене осталось 38 грн 50 коп. Сколько минут длился разговор, если одна минута разговора стоит 25 коп.?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

387. 1) Постройте в одной системе координат графики функций $y=2x$, $y=2x-3$ и $y=2x+4$.

2) Параллельны ли эти графики?

3) Как из графика функции $y=2x$ получить график функции $y=2x-3$?

4) Как из графика функции $y=2x$ получить график функции $y=2x+4$?

Интересные задачки для неленивых

388. Сравните дроби $\frac{222\,221}{333\,332}$ и $\frac{444\,443}{666\,663}$.

Математика вокруг нас

586. В доме, в котором живут первоклассница Наташа и старшеклассник Сергей, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 4 квартиры. Наташа живет в квартире № 91, а Сергей – в квартире № 170. В каком подъезде и на каком этаже живет каждый из них?

Интересные задачки для неленивых

587. Упростите выражение:

$$2016 \cdot (2017^9 + 2017^8 + 2017^7 + \ldots + 2017^2 + 2018) + 1.$$

Домашняя самостоятельная работа № 3

Каждое задание имеет четыре варианта ответа (А–Г), среди которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1

1. Какое из неравенств является квадратным:

А. $2x^2 - 3x^3 \geqslant 0$; **Б.** $7x^2 - 9x + 12 \leqslant 0$;

В. $\dfrac{1}{3x^2 - 2x + 7} < 0$; **Г.** $2x - 9 > 0$?

2. Укажите число, являющееся решением неравенства $x^2 - 2x - 3 < 0$.

А. -2; **Б.** 2; **В.** 4; **Г.** -1.

3. Укажите решение системы уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{cases}$

А. $(1; 4)$; **Б.** $(5; 0)$; **В.** $(-4; 1)$; **Г.** $(4; 1)$.

2

4. Решите неравенство $x^2 + 2x \leqslant 0$.

А. $[-2; 0]$; **Б.** $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; **В.** $(-2; 0)$; **Г.** $[0; 2]$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

А. $(-1; -3)$; **Б.** $(3; 1)$;

В. $(3; 1), (-1; -3)$; **Г.** $(1; 3), (-3; -1)$.

6. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 21 см, а его площадь – 54 см^2. Найдите меньший катет треугольника.

А. 8 см; **Б.** 12 см; **В.** 10 см; **Г.** 9 см.

7. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x + 1}$.

А. $[-3; -1) \cup (-1; 2]$; **Б.** $(-\infty; +\infty)$;
В. $(-3; -1) \cup (-1; 2)$; **Г.** $[-3; 2]$.

8. Из двух пунктов, расстояние между которыми 6 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 1 ч 12 мин. Найдите скорость пешехода, шедшего быстрее, если на весь путь он потратил на 1 ч меньше, чем второй.

А. 2 км/ч; **Б.** 2,5 км/ч; **В.** 3 км/ч; **Г.** 4 км/ч.

9. Не выполняя построения, найдите все точки пересечения прямой $x + y = 3$ и параболы $y = x^2 + 1$.

А. $(1; 2)$; **Б.** $(1; 2)$, $(-2; 5)$; **В.** $(-1; 4)$, $(2; 1)$; **Г.** $(2; 1)$, $(5; -2)$.

10. Укажите все решения системы уравнений $\begin{cases} x - 2xy = 6, \\ y - 2xy = 3. \end{cases}$

А. $(2; -1)$, $(1{,}5; -1{,}5)$; **Б.** $(-1; 2)$, $(-1{,}5; 1{,}5)$;
В. система не имеет решений; **Г.** $(2; -1)$.

11. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + (2 - a)x + 9 = 0$ имеет два различных корня.

А. $(-4; 8)$; **Б.** $(-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$;
В. $(-\infty; -8) \cup (4; +\infty)$; **Г.** $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$.

12. Мастер и ученик, работая вместе, выполняют некоторую работу за 6 ч. Работая самостоятельно, мастер выполняет $\frac{1}{5}$ часть работы на 3 ч быстрее, чем ученик $\frac{1}{3}$ часть работы. За сколько часов выполнит эту работу ученик, если будет работать самостоятельно?

А. 9 ч; **Б.** 10 ч; **В.** 12 ч; **Г.** 15 ч.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 12–14

1. Какие из неравенств являются квадратными:

1) $x^2 + x^3 - 3 \geqslant 0$; 2) $x^2 + 3x - 3 \geqslant 0$;

3) $4x - x^2 < 0$; 4) $\dfrac{1}{4x - x^2} < 0$?

2. Какие из чисел –1; 0; 1; 2; 3 являются решениями неравенства $x^2 - x - 2 \geqslant 0$?

3. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ пара чисел: 1) (4; 0); 2) (1; 3)?

4. Решите неравенство:
1) $x^2 - 3x < 0$; 2) $x^2 - 7x - 30 \geqslant 0$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

6. Периметр прямоугольника равен 24 см, а его площадь – 35 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

7. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{8 - x^2 + 2x}}{x - 1}$.

8. Из двух пунктов, расстояние между которыми 24 км, отправились одновременно навстречу друг другу велосипедист и пешеход и встретились через 2 ч. Найдите скорость каждого из них, если велосипедист потратил на весь путь на 3 ч меньше, чем пешеход.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3xy - x = 5, \\ 3xy - y = 4. \end{cases}$

Дополнительные задания

10. Найдите, при каких значениях a не имеет корней уравнение $x^2 + (a - 3)x + 4 = 0$.

11. Два рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторое задание за 12 ч. За сколько часов может выполнить это задание каждый рабочий, работая один, если одному из них для выполнения четверти задания необходимо на 5 ч меньше, чем другому для выполнения трети задания?

Упражнения для повторения главы 2

К § 8

588. Найдите:
1) $f(1)$, $f(2)$, $f(-4)$, если $f(x) = x^2 - 1$;
2) $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, если $g(x) = x^3 + 8$.

Задачи повышенной сложности

К главе 1

1044. Докажите неравенство:

1) $(x^3 - y^3)(x - y) \geqslant 3xy(x - y)^2$;
2) $(x^2 - y^2)(x^4 - y^4) \leqslant (x^3 - y^3)^2$.

1045. Докажите неравенство:

1) $9x^2 + 25 \geqslant 30|x|$;
2) $x^2 - 4x + 5 \geqslant 2|x - 2|$.

1046. Докажите, что для неотрицательных значений переменных x и y имеет место неравенство:

1) $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$;
2) $(x + y)^3 \leqslant 4(x^3 + y^3)$.

1047. Докажите, что если $x \geqslant y$, то:

1) $x^3 - y^3 \geqslant x^2y - yx^2$;
2) $x^5 - y^5 \geqslant x^4y - xy^4$.

1048. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то имеет место неравенство $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

1049. Докажите, что:

1) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$;

2) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} < 2$.

1050. Докажите неравенство: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$.

1051. Процент учащихся 9-го класса, владеющих тремя иностранными языками (английским, французским и немецким), находится в пределах от 2,9 % до 3,1 %. Определите, какое наименьшее количество учащихся может быть в этом классе. Сколько учащихся этого класса владеют тремя иностранными языками?

1052. Правильно ли, что:

1) если $a^2b \leqslant 0$, то $b \leqslant 0$;
2) если $\frac{a^2}{b} \geqslant 0$, то $b > 0$;
3) если $a^2b > 0$, то $b > 0$;
4) если $\frac{a^2}{b} < 0$, то $b < 0$?

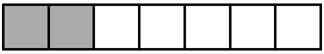
1053. Между числами $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{7}$ найдите число, равное квадрату рационального числа. Сколько существует таких чисел?

ОБРАЗЕЦ ВАРИАНТА АТТЕСТАЦИОННОЙ ПИСЬМЕННОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Задания 1–12 имеют по четыре варианта ответа, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный, по вашему мнению, вариант ответа.

1. Какая часть полоски закрашена?



А) $\frac{2}{5}$; Б) $\frac{5}{7}$; В) $\frac{1}{7}$; Г) $\frac{2}{7}$.

2. Сколько килограммов сушеных яблок можно получить из 9 кг свежих, если из 30 кг свежих яблок получается 3 кг сушеных?

А) 0,8 кг; Б) 0,09 кг; В) 1,8 кг; Г) 0,9 кг.

3. Укажите уравнение, корнем которого является число 6.

А) $0x = 6$; Б) $5x = 30$; В) $-5x = 30$; Г) $5x = -30$.

4. Упростите выражение $(m - 3t)(m + 3t) - m^2$.

А) $-9t^2$; Б) $-3t^2$; В) $2m^2 - 9t^2$; Г) $-2m^2 - 9t^2$.

5. Выполните действие $3\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

А) $3\sqrt{4}$; Б) $3\sqrt{2}$; В) $4\sqrt{2}$; Г) $2\sqrt{2}$.

6. Вычислите $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-7}$.

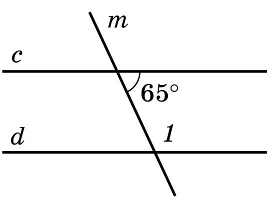
А) 16; Б) 4; В) $\frac{1}{16}$; Г) –16.

7. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_3 = 14$, $q = -2$. Найдите b_2.

А) 7; Б) –7; В) 12; Г) 16.

8. Укажите множество решений неравенства $x^2 - 25 \le 0$.

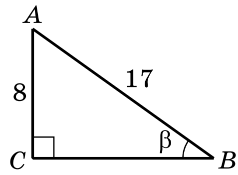
А) $(-5; 5)$; Б) $[-5; 5]$;
В) $(-\infty; 5]$; Г) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.



9. Прямые c и d параллельны, m – их секущая. Укажите градусную меру угла *1*.

А) 65°; Б) 105°;
В) 115°; Г) 125°.

10. По рисунку найдите $\cos\beta$.



А) $\frac{15}{17}$; Б) $\frac{8}{17}$; В) $\frac{8}{15}$; Г) $\frac{17}{15}$.

11. Укажите координаты середины отрезка, концами которого являются точки $K(-2;\ 1)$ и $L(6;\ -13)$.

А) $(-2;\ 6)$; Б) $(-2;\ -6)$; В) $(4;\ -12)$; Г) $(2;\ -6)$.

12. В квадрат, площадь которого 16 см^2, вписана окружность. Найдите длину этой окружности.

А) 2π см; Б) 8π см; В) 4π см; Г) 16π см.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Решите задания 13–16. Запишите ответ к каждому из них.

13. Упростите выражение $\left(\dfrac{a+7b}{a^2-7ab}-\dfrac{a-7b}{a^2+7ab}\right):\dfrac{28b^2}{49b^2-a^2}$.

14. Найдите наименьшее целое значение x, при котором разность дробей $\dfrac{29-3x}{2}$ и $\dfrac{x+7}{3}$ будет отрицательной.

15. Найдите область значений функции $y = 2x^2 + 4x - 1$.

16. При каких значениях b векторы $\vec{m}(-12;\ b)$ и $\vec{n}(3b;\ -9)$ коллинеарны?

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

Решения заданий 17–19 должны быть обоснованы. В них нужно записать последовательные логические действия и пояснения, сделать ссылки на математические факты, из которых следует то или иное утверждение. При необходимости проиллюстрировать решения схемами, графиками, таблицами.

17. Поезд задержался в пути на 30 мин. Чтобы прибыть вовремя, машинист поезда на перегоне длиной 225 км увеличил скорость на 5 км/ч по сравнению с запланированной. С какой запланированной скоростью должен был двигаться поезд?

18. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y - xy + x = 2, \\ y + xy - 3x = 0. \end{cases}$

19. Углы параллелограмма относятся как $9 : 11$. Найдите угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

16. 1) $\sqrt{5} - 2 = \dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}$; 2) $\sqrt{7} - \sqrt{3} > \dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

17. 1) $\sqrt{3} - 1 > \dfrac{1}{\sqrt{3} + 1}$; 2) $4 + \sqrt{15} = \dfrac{1}{4 - \sqrt{15}}$. **18.** 1) Указание. $a^2 + 10a + 26 = (a + 5)^2 + 1$. **23.** 2) Указание. $a^2 + b^2 - (4(a + b) - 8) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2$; 3) $m^2 + n^2 + 1 - (m + n + mn) = \dfrac{(m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 - 2m + 1) + (n^2 - 2n + 1)}{2}$. **24.** 3) Указание. Докажите, что $(a + 1)^3 - 4(a^3 + 1) = -3(a + 1)(a - 1)^2$. **26.** 2) Указание. $\dfrac{3m}{5n} + \dfrac{5n}{12m} - (-1) = \dfrac{(6m + 5n)^2}{60mn}$. **28.** $m^3 + n^3 > mn(m + n)$. **29.** Произведение первого и четвертого выражений меньше произведения второго и третьего. **32.** 8 дней. **33.** 1,5. **34.** 2505 грн. **38.** $65\dfrac{5}{11}$ км/ч. **55.** 1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a > 0$; 4) $a > 0$. **56.** 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x > 0$; 4) $x < 0$. **57.** 1) Да; 2) нет. **58.** 1) $x + 2 > y$; 2) $y - 3 < x$; 3) $-x + 1 < -y + 1$; 4) $-x < -y + 8$; 5) $-(x + 1) < -y$; 6) сравнить невозможно. **59.** 1) $a - 2 < b$; 2) $b + 3 > a$; 3) $-a + 2 > -b + 2$; 4) $-b - 7 < -a$; 5) $-a > -(b + 3)$; 6) сравнить невозможно. **60.** 1) $3,1 < 2x + 0,7 < 3,7$; 2) $3,5 < 5 - x < 3,8$; 3) $-0,6 < \dfrac{x}{3} - 1 < -0,5$; 4) $-13 < 2 - 10x < -10$. **61.** 1) $2,2 < 3a - 0,2 < 3,4$; 2) $2,8 < 4 - a < 3,2$; 3) $3,4 < \dfrac{a}{2} + 3 < 3,6$; 4) $4 < 10 - 5a < 6$. **62.** 1) $4 < \dfrac{20}{a} < 10$; 2) $0,1 < \dfrac{1}{3a + 4} < 1$. **63.** 1) $10 < \dfrac{100}{x} < 20$; 2) $0,2 < \dfrac{1}{2x - 3} < 1$. **64.** $4,2 < a < 5$. **65.** $48 < p < 51$. **66.** 1) $x > y$; 2) $x < y$. **67.** 1) $a < b$; 2) $a > b$. **68.** $3 < \dfrac{12}{7 - 3a} < 12$. **69.** $3 < \dfrac{27}{13 - 2b} < 9$. **70.** $\dfrac{6}{x} > 3$ или $\dfrac{6}{x} < -3$. **72.** 1) -3; 2) -4. **74.** 12,25. **75.** Модель B ($R = 32,5$), модель A ($R = 28$). **76.** Говерла, Днепр. **92.** Нет. **95.** 1) $2,5 < \dfrac{a}{b} < 10$; 2) $\dfrac{2}{15} < \dfrac{4b}{3a} < \dfrac{8}{15}$. **96.** 1) $\dfrac{2}{5} < \dfrac{x}{y} < 4$; 2) $\dfrac{5}{8} < \dfrac{5y}{2x} < \dfrac{25}{4}$. **97.** $10,8 < P < 12,4$. **98.** $28 < P < 34$. **99.** $63° < \angle A < 70°$. **102.** Указание. Используйте неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим и почлен-

ОГЛАВЛЕНИЕ