

Математика є основним засобом у багатьох галузях науки і техніки. Без математики не можуть існувати медицина, економіка, машинобудування. Певних знань з математики та готовності їх застосовувати вимагає й вивчення багатьох шкільних навчальних предметів. Наприклад, без математики неможливо уявити фізику, хімію, інформатику. Сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах також потребують володіння певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв'язування практичних задач. Тому одне з головних завдань курсу математики старшої школи – допомогти кожному з вас досягти такої практичної компетентності, яка б забезпечила готовність до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння обраною професією. Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому.

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і виконання вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої робіт тощо. Теоретичний матеріал підручника автор намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами застосування математики в повсякденному житті.

Вивчення математики потребуватиме від вас наполегливості, логіки мислення, просторової уяви.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:



—означення та математичні твердження, які треба запам'ятати;



—запитання і завдання до теоретичного матеріалу;



— теорема;



— наслідок;



— доведення завершено;



— «ключова» задача (задача, висновки якої використовуються для розв'язування інших задач);

1.23 — вправа для виконання в класі;

1.24 — вправа для виконання вдома.

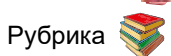
Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки  починаються вправи початкового рівня;

з позначки  починаються вправи середнього рівня;

з позначки  починаються вправи достатнього рівня;

з позначки  починаються вправи високого рівня.



Рубрика «Розв'яжіть задачі та виконайте вправи» містить

значну кількість завдань для класної і домашньої робіт, усіх вправ, практичних завдань, що відповідають темі параграфа та допоможуть

добре її опрацювати. У рубриці  «Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» пропонується виконати вправи, необхідні для вивчення

наступної теми. У рубриці  **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі.

Підручник містить багато цікавих фактів з історії становлення та розвитку математичної науки, виникнення основних її понять, життєвого шляху українських учених, які долучилися до творення шкільного курсу математики.

Бажаємо вам успіхів у навчанні!

Шановні вчительки та вчителі!

Програма з математики рівня стандарту складається з двох навчальних курсів: алгебра і початки аналізу та геометрія. Тому пропонується підручник, відповідно до програми, також складається з двох частин.

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання математики. Автор намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, формував в учнів науковий світогляд, усвідомлення що математичні знання є невід'ємною складовою загальної культури людини і необхідною умовою повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві й предметні компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість.

Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну та практичну складові, підручник містить рубрику «Життєва математика», що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та допоможе формувати в учнів практичну компетентність. У підручник включено велику кількість задач і вправ, задач практичного змісту. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності забезпечить особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятиме формуванню позитивної мотивації учнів до навчання.

Додатковий дидактичний матеріал для узагальнення, систематизації та перевірки знань можна знайти на сайті видавництва «Гене́за» geneza.ua.

Щастя вам у вашій нелегкій праці!

ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ

- **пригадаємо**, що таке область визначення та множина значень, зростання і спадання функції; як знайти значення функції для даного значення аргументу і значення аргументу за відповідним йому значенням функції;
- **дізнаємося**, що таке парність, непарність, неперервність, монотонність функції; корінь n -го степеня із числа; степінь з раціональним показником; степенева функція;
- **навчимося** описувати властивості функції, у тому числі за її графіком; спрощувати, обчислювати, оцінювати й порівнювати значення виразів, що містять степені з раціональними показниками та ірраціональні вирази.

§ 1. ЧИСЛОВА ФУНКЦІЯ. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

1. Поняття функції, її області визначення і множини значень

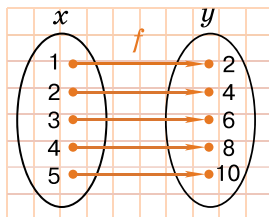
З функцією ми почали знайомитися в курсі алгебри основної школи. Нагадаємо означення функції.



Числовою функцією (або функціональною залежністю) називають таку залежність між двома змінними, при якій кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає за певним правилом єдине значення залежної змінної.

Нагадаємо, що функції, зазвичай, позначають латинськими (інколи грецькими) літерами.

Розглянемо функцію f , у якій кожному натуральному значенню x від 1 до 5 відповідає число y , удвічі більше за x (мал. 1.1). Стрілка вказує на число y , яке відповідає числу x . Число y називають *значенням функції f у точці x* і позначають через $f(x)$. На малюнку 1.1, зокрема, $f(3) = 6$.



Мал. 1.1

Нагадаємо, що незалежну змінну x ще називають *аргументом* функції, а про залежну змінну y кажуть, що вона є *функцією від цього аргументу*.



Областю визначення функції $y = f(x)$ називають множину всіх значень, яких може набувати аргумент x .

Позначають область визначення символом $D(f)$ або $D(y)$.

Наприклад, областю визначення функції, яку ми розглянули вище, є множина, що складається із чисел 1, 2, 3, 4, 5, тобто $D(f) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, а областю визначення функції $y = x^2 - 2x + 3$ є множина всіх дійсних чисел, що можна записати так: $D(y) = R$.

Задача 1. Знайти область визначення функції:

$$1) y = \frac{x-2}{x+1}; \quad 2) y = \sqrt{x-2}.$$

- Розв'язання. 1) Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то областю визначення функції є множина усіх значень x , для яких $x+1 \neq 0$, тобто $x \neq -1$. Отже, $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
- 2) Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то областю визначення функції є множина всіх тих значень x ,

для яких $x - 2 \geq 0$, тобто $x \geq 2$. Отже, $D(y) = [2; +\infty)$.

Відповідь. 1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 2) $D(y) = [2; +\infty)$.



Множиною (або областю) значень функції $y = f(x)$ називають множину, що складається з усіх чисел $f(x)$, де $x \in D(f)$.

Позначають множину значень символом $E(f)$ або $E(y)$. Для функції на малюнку 1.1 маємо: $E(f) = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Щоб знайти множину значень функції $y = x^2 - 2x + 3$, перетворимо вираз, який записано у формулі функції:

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Отже, функцію можна записати у вигляді: $y = (x - 1)^2 + 2$. Оскільки $(x - 1)^2 \geq 0$, то $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$. Тому $E(y) = [2; +\infty)$.

Задача 2. Знайти область значень функції $y = 3 - \sqrt{x}$.

- Розв'язання. За означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{x} \geq 0$. Тоді: $-\sqrt{x} \leq 0$. Далі додамо до обох частин цієї нерівності число 3, отримаємо: $3 - \sqrt{x} \leq 3$, тобто $y \leq 3$. Тому $E(y) = (-\infty; 3]$.

Відповідь. $E(y) = (-\infty; 3]$.

Як відомо, функції є математичними моделями реальних процесів і явищ навколишнього світу. Тому їх часто застосовують під час дослідження різноманітних проблем у фізиці, економіці, біології тощо.

Задача 3. Початкова вартість деякого обладнання складає 200 000 грн. Щороку вона зменшується на 5 %. Знайти:

1) Функцію P залежності вартості обладнання від терміну експлуатації t (років).

2) Вартість обладнання через 4 роки, використовуючи функцію P .

- Розв'язання. 1) За умовою щороку вартість обладнання становитиме $100\% - 5\% = 95\%$ від вартості обладнання за минулий рік. Тому вартість обладнання складатиме:

- через рік $- 200\,000 \cdot 0,95$,
- через 2 роки $- 200\,000 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 200\,000 \cdot 0,95^2$, ...,
- через t років $- 200\,000 \cdot 0,95^t$.

Маємо функцію:

$$P(t) = 200\,000 \cdot 0,95^t, \text{ де } t \in N.$$

2) Якщо $t = 4$, то $P(4) = 200\,000 \cdot 0,95^4 = 162\,901,25$ (грн).

Відповідь. 1) $P(t) = 200\,000 \cdot 0,95^t$; 2) 162 901,25 грн.

Зауважимо, що функцію залежності вартості обладнання P від терміну експлуатації можна було знайти і за формулою складних відсотків¹: $P(t) = 200\,000 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^t$, тобто $P(t) = 200\,000 \cdot 0,95^t$.

Задача 4. Записати формулу для обчислення кінетичної енергії кульки масою 50 г. З'ясувати, чи задає ця формула функцію, і, якщо так, указати її аргумент.

- Розв'язання. Як відомо, кінетичну енергію W_k обчислюють за формулою $W_k = \frac{mv^2}{2}$. Тому маємо: $W_k = \frac{50v^2}{2}$, тобто $W_k(v) = 25v^2$.
- Відповідь. W_k є функцією від аргументу v , де $v \geq 0$.

2. Способи задання функцій

Нагадаємо, що функцію можна задавати різними способами: формулою, графіком, таблицею, словесно тощо.

Наприклад, кожен з функцій, які ми розглянули вище, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = \frac{x-2}{x+1}$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $W_k = 25v^2$, $P(t) = 200\,000 \cdot 0,95^t$, задано формулою. Цей спосіб задання функції є досить зручним, адже дає змогу для довільного значення аргументу з області визначення функції знайти відповідне йому значення функції, а часто розв'язати й обернену задачу.

Задача 5. Функцію задано формулою $y = \frac{x+3}{x-5}$.

- 1) Знайти значення функції для $x = 4$.
- 2) Порівняти $y(0)$ і $y(1)$.
- 3) Знайти, при якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0.

- Розв'язання. 1) $y(4) = \frac{4+3}{4-5} = \frac{7}{-1} = -7$.
- 2) Оскільки $y(0) = \frac{0+3}{0-5} = -0,6$, а $y(1) = \frac{1+3}{1-5} = -1$, то $y(0) > y(1)$.
- 3) Оскільки $y = 0$, маємо рівняння: $\frac{x+3}{x-5} = 0$, звідки $x = -3$.

Відповідь. 1) $y(4) = -7$; 2) $y(0) > y(1)$; 3) $x = -3$.

¹ Формулу складних відсотків можна знайти в підручнику «Алгебра. 9 клас» («Генеза», 2017, автор Істер О.С., с. 178–179) або в іншій математичній літературі.

Задача 6. Формула описує зміну температури води в баку (у °C) залежно від часу t (у хв):

$$p(t) = \begin{cases} 2t + 20, & \text{якщо } 0 \leq t < 40, \\ 100, & \text{якщо } 40 \leq t < 50, \\ -0,8t + 140, & \text{якщо } 50 \leq t \leq 120. \end{cases}$$

Знайти: 1) $p(10)$; 2) $p(45)$; 3) $p(80)$.

- Розв'язання. 1) Оскільки $0 < 10 < 40$, то $p(10)$ обчислюємо за формулою $p(t) = 2t + 20$. Отже, $p(10) = 2 \cdot 10 + 20 = 40$.
 2) Оскільки $40 < 45 < 50$, то $p(45) = 100$.
 3) Оскільки $50 < 80 < 120$, то $p(80)$ обчислюємо за формулою $p = -0,8t + 140$. Отже, $p(80) = -0,8 \cdot 80 + 140 = 76$.

Відповідь. 1) 40; 2) 100; 3) 76.

Функцію також можна задавати таблицею. Табличний спосіб задання дозволяє безпосередньо вказати значення функції, але лише для скінченного набору значень аргументу.

Припустимо, щогодини, починаючи з дев'ятої ранку і до п'ятнадцятої, вимірювали атмосферний тиск і результат заносили в таблицю:

Час t , год	9	10	11	12	13	14	15
Атмосферний тиск p , мм. рт. ст.	754	755	757	755	754	753	754

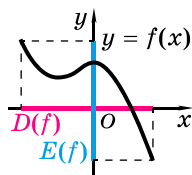
У результаті отримали функцію, область визначення якої складається із чисел 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15 (числа першого рядка таблиці), а множина значень – із чисел 753; 754; 755; 757 (числа другого рядка таблиці).

Часто функцію задають за допомогою графіка. Графічний спосіб задання дає можливість унаочнити властивості функції.

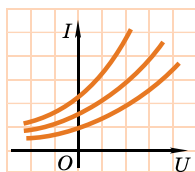
Наприклад, на малюнку 1.2 зображено, як за графіком функції можна знайти її область визначення і множину значень.

На малюнку 1.3 зображено вольт-амперні характеристики деяких електричних елементів, тобто залежність сили струму від напруги задано графічно. Цю залежність отримано не за допомогою формули, а експериментальним шляхом.

На малюнку 1.4 зображено кардіограму людини. Кардіограму можна вважати графіком зміни електричного потенціалу на волокнах серцевого м'яза під час його скорочень.



Мал. 1.2



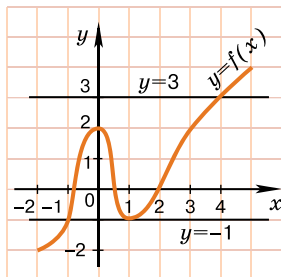
Мал. 1.3



Мал. 1.4

Задача 7. За графіком функції $y = f(x)$ на малюнку 1.5 знайти: 1) область визначення функції; 2) множину значень функції; 3) значення функції для $x = -1$; $x = 2$; 4) значення аргументу, при яких $y = -1$; $y = 3$.

- Розв'язання. 1) Спроекуємо всі точки графіка на вісь x . Отримаємо проміжок $[-2; 5]$. Отже, $D(y) = [-2; 5]$.
- 2) Спроекуємо всі точки графіка на вісь y . Отримаємо проміжок $[-2; 4]$. Отже, $E(y) = [-2; 4]$.
- 3) За графіком: $y(-1) = -1$; $y(2) = 0$.
- 4) Оскільки пряма $y = -1$ перетинає графік у точках з абсцисами $x = -1$ і $x = 1$, то $f(x) = -1$ для $x = -1$ або $x = 1$. Пряма $y = 3$ перетинає графік у точці з абсцисою 4. Отже, $f(x) = 3$, якщо $x = 4$.



Мал. 1.5

Відповідь. 1) $D(y) = [-2; 5]$; 2) $E(y) = [-2; 4]$; 3) $y(-1) = -1$; $y(2) = 0$; 4) $f(x) = -1$, якщо $x = -1$ або $x = 1$; $f(x) = 3$, якщо $x = 4$.

Словесний спосіб задання функції полягає в тому, що функціональну залежність формують словами. Наприклад, «кожному числу x ставимо у відповідність квадрат цього числа, зменшений на 10». Якщо сказане задати формулою, то вона виглядатиме так: $y = x^2 - 10$. Словесний спосіб задання функції використовують дуже рідко.

3. Графік функції



Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним їм значенням функції.

Раніше ми вже працювали з функціями вигляду $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$. Використовуючи довідкову літературу та комп'ютерні програми для побудови графіків функцій, пригадайте властивості цих функцій та вигляд їх графіків.

А ще раніше...

Функція — одне з найважливіших понять сучасної математики. Його появу у XVII ст. пов'язують із розвитком механі-

ки та втіленням у життя ідеї використання поняття змінної.

Так, французькі математики Рене Декарт (1596–1650) та П'єр Ферма (1601–1665) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси.

Термін «функція» (від лат. *functio* – виконання, звершення) для назви залежностей вперше ввів німецький філософ, фізик і математик Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками.

Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) та його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений зі змінних чисел за допомогою тих чи інших аналітичних операцій (математичних дій). Функцію як залежність однієї змінної величини від іншої ввів чеський математик Бернгард Больцано (1781–1848).

Найзагальніше сучасне означення функції запропонувала в середині XX ст. група математиків, яка працювала під псевдонімом Нікола Бурбакі.¹



- Що називають числовою функцією? • Що називають областю визначення функції і що множиною значень функції? • Назвіть способи задання функцій, до кожного наведіть приклади.
- Що називають графіком функції? • Пригадайте, як будувати графіки за допомогою перетворень графіків функцій.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



1.1. (Усно). Чи є функцією залежність:

1) $p = m^2 + p^2$; 2) $x - 2x^2 = y$; 3) $t = z + \sqrt{z^2 + 1}$;

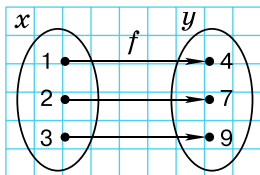
4) $x = \frac{a}{x+a}$; 5) $ab = a + b$; 6) $(p^2 - p^3) : 7 = c$?

Для функцій назвіть незалежну змінну (аргумент) та залежну (значення функції).

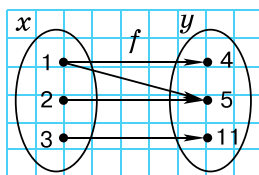
1.2. Для функції $f(x) = (x - 2)^3$ знайдіть $f(2)$, $f(1)$.

1.3. Для функції $g(x) = (x + 1)^2$ знайдіть $g(0)$, $g(-1)$.

1.4. (Усно). На малюнках 1.6 і 1.7 зображено відповідності між числами. Яка з них є функцією? Чому?



Мал. 1.6



Мал. 1.7

¹ Детальніше про виникнення і розвиток учення про функцію можна прочитати в підручнику «Алгебра. 9 клас» (видавництво «Генеза», автор О.С. Істер, с. 71–72) та в додатковій літературі.

2 Знайдіть значення функції (1.5–1.6):

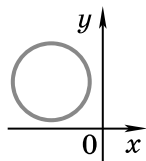
1.5. 1) $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$ у точках -1 ; 2 ; $0,1$;

2) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ у точках 0 ; 2 ; -2 .

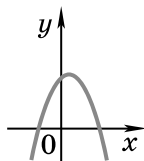
1.6. 1) $f(x) = \frac{2}{x-1} + x$ у точках 0 ; -1 ; $0,8$;

2) $g(x) = \sqrt{3x - x^2}$ у точках 0 ; 1 ; 3 .

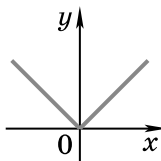
1.7. (Усно). Чи є графіками функцій $y = f(x)$ фігури, зображені на малюнках 1.8–1.11?



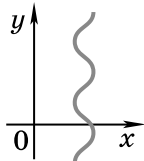
Мал. 1.8



Мал. 1.9



Мал. 1.10



Мал. 1.11

Побудуйте графік функції (1.8–1.9):

1.8. 1) $y = 2x - 3$; 2) $y = -\frac{8}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = x^2 - 2x$.

1.9. 1) $y = -2x$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = x^2$; 4) $y = x^2 + 4x$.

1.10. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Знайдіть:

1) $f(5)$; 2) таке значення x , при якому $f(x) = 3$.

1.11. Функцію задано формулою $g(x) = \frac{2-x}{2+x}$. Знайдіть:

1) $g(-1)$; 2) таке значення x , при якому $g(x) = -5$.

Знайдіть область визначення функції (1.12–1.13):

1.12. 1) $f(x) = x - 2$; 2) $f(x) = \frac{2-x}{3}$; 3) $f(x) = \frac{3}{2-x}$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$; 6) $f(x) = \sqrt{x+3}$.

1.13. 1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = \frac{x+1}{2}$; 3) $f(x) = \frac{2}{x+1}$;

4) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$; 6) $f(x) = \sqrt{x-2}$.

1.14. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5	6
y	5	-1	0	5	0	4

Знайдіть: 1) значення функції, якщо $x = 2$; 5; 2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4; 5; 3) область визначення функції; 4) область значень функції.

1.15. Функцію задано таблицею:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	-1	0	5	3	4	0

Знайдіть: 1) значення функції, якщо $x = -2$; 3;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0; 4;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.



1.16. За допомогою перетворень графіка функції $y = x^2$ побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = x^2 - 2$;
3) $y = (x - 3)^2$; 4) $y = (x + 2)^2$.

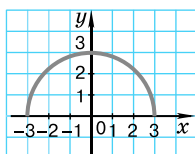
1.17. За допомогою перетворень графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = \sqrt{x} - 3$;
3) $y = \sqrt{x + 1}$; 4) $y = \sqrt{x - 2}$.

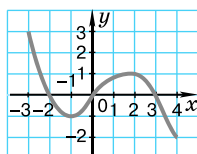
1.18. Під час вільного падіння тіло долає відстань $S = 0,5gt^2$, де t – час у секундах, $g \approx 10$ м/с². Побудуйте графік цієї функції. Яку відстань подолає тіло за 1 с? За який час тіло подолає 20 м?

1.19. На малюнках 1.12–1.14 функції задано графіками. Для кожної з функцій укажіть:

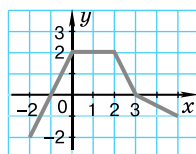
- 1) область визначення; 2) область значень;
3) координати точок перетину з осями координат.



Мал. 1.12



Мал. 1.13



Мал. 1.14

1.20. Побудуйте графік деякої функції $y = f(x)$, область визначення якої – проміжок $[0; 5]$, а область значень – проміжок $[-3; 3]$.

Знайдіть область визначення функції (1.21–1.22):

1.21. 1) $f(x) = \frac{4}{|x| - 5}$;

2) $f(x) = \frac{5}{3 + |x|}$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$;

4) $f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 3x}$;

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{x^2 + x - 2}$;

6) $f(x) = \frac{3}{1 - \sqrt{x}}$;

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x - 5}$;

8) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{-x}$.

1.22. 1) $f(x) = \frac{3}{7 - |x|}$;

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - x - 2}$;

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x^2 + 2x - 8}$;

5) $f(x) = \frac{1}{2 - x} + \sqrt{x}$;

6) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$.

1.23. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{якщо } x < 1, \\ x - 3, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Знайдіть $f(-2)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(-3)$.

1.24. Дано функцію $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x + 5, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

Знайдіть $g(-3)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g(2)$.

1.25. Наведіть приклад функції, областю визначення якої є:

- 1) множина всіх дійсних чисел;
- 2) множина всіх дійсних чисел, крім числа 2;
- 3) множина всіх дійсних чисел, крім чисел 1 і -3;
- 4) множина всіх дійсних чисел, більших або рівних числу 4.

Знайдіть множину значень функції (1.26–1.27):

1.26. 1) $f(x) = x^2$;

2) $f(x) = x^2 - 3$;

3) $f(x) = x^2 + 4$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$;

5) $f(x) = \sqrt{x} - 2$;

6) $f(x) = \sqrt{x} + 3$.

1.27. 1) $f(x) = |x|$;

2) $f(x) = |x| + 5$;

3) $f(x) = |x| - 3$.

1.28. Знайдіть координати вершини параболи $y = 3x^2 - 6x + 5$. Побудуйте схематично графік функції та знайдіть її область значень.



1.29. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4, \\ |x-6|, & \text{якщо } x > 4; \end{cases} \quad 2) g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{якщо } x < 0, \\ 2x, & \text{якщо } 0 \leq x < 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

1.30. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ 2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 4, \\ x^2 - 4x + 4, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

Знайдіть множину значень функції (**1.31–1.32**):

1.31. 1) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$; 2) $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$;

3) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2+9} - 2$; 6) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$.

1.32. 1) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; 2) $f(x) = \frac{6}{x^2+1}$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2+4} + 1$.

Побудуйте графік функції (**1.33–1.34**):

1.33. 1) $y = x^2 - 2x - 3$;

2) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

3) $y = x^2 - 2|x| - 3$;

4) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

1.34. 1) $y = x^2 - 2x$;

2) $y = |x^2 - 2x|$;

3) $y = x^2 - 2|x|$;

4) $y = |x^2 - 2|x||$.



Життєва математика

1.35. Пляшечка шампуню коштує 40 грн. Яку найбільшу кількість таких пляшечок можна придбати на 170 грн під час дії акції, коли знижка на цей шампунь складає 25 %?





Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.36. Побудуйте схематично графік функції та знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції:

- 1) $y = x + 3$; 2) $y = 5 - 3x$; 3) $y = x^2$;
 4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \frac{8}{x}$; 6) $y = -\frac{10}{x}$.

1.37. Дано: $f(x) = x^4$. Порівняйте:

- 1) $f(-2)$ і $f(2)$; 2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Чи можна дійти висновку, що для будь-якого значення x справджується рівність: $f(-x) = f(x)$?

1.38. Дано: $g(x) = x^3$. Порівняйте:

- 1) $g(3)$ і $-g(-3)$; 2) $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ і $-g\left(\frac{1}{3}\right)$.

Чи можна дійти висновку, що для будь-якого значення x справджується рівність: $g(-x) = -g(x)$?

§ 2. МОНОТОННІСТЬ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. ПАРНІ ТА НЕПАРНІ ФУНКЦІЇ

У цьому параграфі ми пригадаємо вже відомі нам та вивчимо нові властивості функцій.

1. Монотонність функції

У курсі алгебри 9 класу ми вже ознайомилися з такими властивостями функцій, як зростання і спадання. Пригадаємо їх.



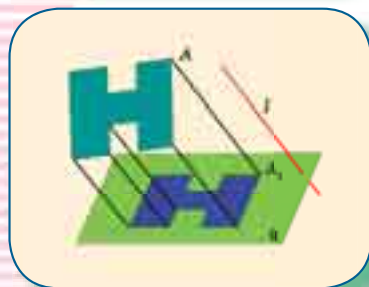
Функцію $y = f(x)$ називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

Інакше кажучи, функцію $y = f(x)$ називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. На малюнку 2.1 зображено графік функції $y = f(x)$, яка зростає на проміжку $[a; b]$, при цьому проміжок $[a; b]$ називають **проміжком зростання функції**.



Функцію $y = f(x)$ називають **спадною** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ

- **пригадаємо** аксіоми і основні поняття планіметрії;
- **дізнаємося** про аксіоми і основні поняття стереометрії, взаємне розміщення прямих і площин у просторі; паралельне проектування та його властивості, ознаки мимобіжності прямих, паралельності прямої і площини, паралельності площин;
- **навчимося** класифікувати взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі; встановлювати паралельність прямих, прямої і площини, площин; мимобіжність прямих; будувати паралельні проекції фігур.

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, АКсіОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ З НИХ

1. Предмет стереометрії

Шкільний курс геометрії складається з планіметрії і стереометрії. У курсі планіметрії 7–9 класів ми вивчали властивості *плоских геометричних фігур*, тобто фігур, усі точки яких лежать в одній площині (відрізок, коло, трикутник тощо).



Стереометрія – це розділ геометрії, який вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

Термін «стереометрія» походить від грец. «стереос» – просторовий, «метрео» – міряти.

У стереометрії розглядають як властивості фігур, всі точки яких лежать в одній площині, – плоских фігур, так і властивості фігур, у яких не всі точки лежать в одній площині, – *просторових фігур*, які ще називають *геометричними тілами*.

У курсі математики основної школи ми вже ознайомилися з геометричними тілами – прямокутним паралелепіпедом, кубом, пірамідою, циліндром, конусом та кулею (мал. 1.1). Предмети, що нас оточують, зазвичай повторюють форму просторових фігур або їх комбінацій. Тому геометрія, зокрема стереометрія, має і прикладне (практичне) значення. Геометричні задачі доводиться розв'язувати в архітектурі та будівництві, геодезії і машинобудуванні, інших галузях науки й техніки.



Мал. 1.1

На уроках геометрії в 10–11 класах ми значно розширимо та поглибимо знання про геометричні фігури в просторі.

2. Основні поняття стереометрії

Основними (*неозначуваними, первісними*) поняттями в стереометрії є поняття *точки, прямої і площини*.

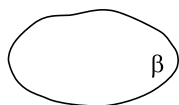
Нагадаємо, що уявлення про точку дає, наприклад, слід на папері від дотику добре загостреного олівця, слід на дошці від дотику крейди тощо. Позначати точки, як і раніше, будемо великими латинськими літерами $A, B, C, D, \dots$.

Уявлення про пряму дає промінь світла, струна на гітарі, розмітка між двома смугами прямолінійної дороги тощо. Прямі можна проводити за допомогою лінійки. При цьому отримують зображення лише частини прямої, а всю пряму уявляють нескінченною в обидва боки. Позначати прямі, як і раніше, будемо малими латинськими літерами $a, b, c, d, \dots$ або двома великими латинськими літерами за назвами двох точок цієї прямої: $AB, CD, MN, \dots$.

Уявлення про площину дає поверхня стола, футбольне поле, віконна шибка, сте-
ля тощо. Площину в геометрії вважають
рівною та необмеженою, вона не має краю
та не має товщини. На малюнку площину
прийнято зображати у вигляді паралело-
грама (мал. 1.2) або довільної замкненої
області (мал. 1.3). При цьому отримують
зображення лише частини площини. По-
значати площини можна малими грецьки-
ми літерами α (альфа), β (бета), γ (гама), $\dots$.



Мал. 1.2



Мал. 1.3

3. Аксіоми стереометрії

Основні властивості найпростіших геометричних фігур у стереометрії формулюють за допомогою *аксіом*. Аксіоми є початковими істинними твердженнями. Усі аксіоми планіметрії, які відомі нам з 7 класу, справджуються і в стереометрії. Нагадаємо ці аксіоми та зауважимо, що коли мова йде про «дві точки» або «дві прямі», вважаємо, що ці точки або прямі – різні.



I. Яка не була б пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° .

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

VIII. На площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.

Оскільки в планіметрії усі фігури, які ми розглядали, лежали в одній площині, а в стереометрії вони можуть лежати в різних площинах, остання аксіома, яку називають *аксіомою паралельності прямих*, потребує уточнення.

Нове поняття – *площина* – потребує ще й розширення системи аксіом, тобто доповнення стереометрії аксіомами, що відображають властивості точок, прямих і площин у просторі.

Тому розглянемо нову групу аксіом – групу аксіом С.

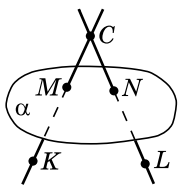


С_I. Яка б не була площина, існують точки, які їй належать, і які їй не належать.

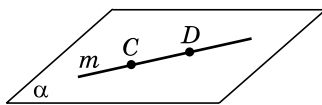
На малюнку 1.4 точки M і N належать площині α (площина α проходить через ці точки), а точки C , K і L – не належать цій площині. Для запису, як і у планіметрії, будемо використовувати символи $\in$ і $\notin$. Тому твердження «точка M належить площині α » можна записати так: $M \in \alpha$, а «точка C не належить площині α » – так: $C \notin \alpha$.



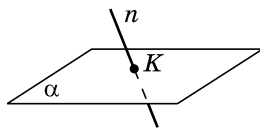
С_{II}. Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки прямої належать цій площині.



Мал. 1.4

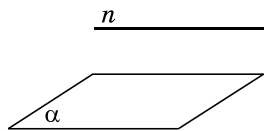


Мал. 1.5



Мал. 1.6

У цьому випадку кажуть, що *пряма належить площині*, або *площина проходить через пряму*. На малюнку 1.5 точки C і D прямої m належать площині α , тому і пряма m , що проходить через ці точки, належить площині α . Для зручності замість «пряма m належить площині α » будемо писати: $m \subset \alpha$. Запис $n \not\subset \alpha$ означатиме, що пряма n не належить площині α , тобто існує така точка прямої n , яка не належить площині α (мал. 1.6 та мал. 1.7). На малюнку 1.6 пряма n і площина α мають одну спільну точку K . У цьому випадку кажуть, що пряма n перетинає площину α в точці K .



Мал. 1.7

Це записують так: $n \cap \alpha = K$.

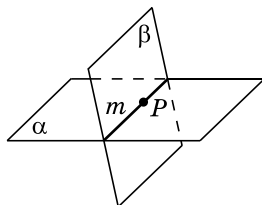
Аксіома С_{II} має різні практичні застосування. Одне з них – перевірка «рівності» лінійки. Із цією метою лінійку прикладають краєм, який перевіряють, до плоскої поверхні, наприклад столу. Якщо край лінійки рівний, то він усіма своїми точками

прилягає до поверхні столу. Якщо ж край нерівний, то в деяких місцях між ним і поверхнею столу утворюється просвіт.

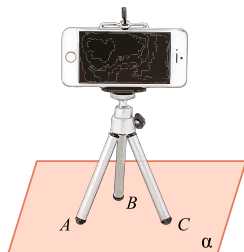
Якщо через пряму m проходить дві різні площини α і β , то кажуть, що *площини α і β перетинаються по прямій m* (мал. 1.8), і записують так: $\alpha \cap \beta = m$.



С_{III}. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.



Мал. 1.8



Мал. 1.9

На малюнку 1.8 площини α і β мають спільну точку P , тобто P належить як площині α , так і площині β . Аксиома С_{III} стверджує, що тоді площини α і β перетинаються по прямій m , причому точка P , в свою чергу, належатиме цій прямій m .



С_{IV}. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

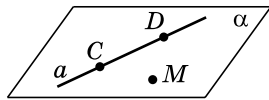
Практичною ілюстрацією цієї аксіоми є, наприклад, стійкість на підлозі будь-якої триноги (табурета на трьох ніжках, фотоштатива тощо). Три точки A , B , C , які є кінцями триноги, завжди можна розмістити у площині підлоги α (мал. 1.9), таку площину називають трьома її точками – площиною ABC і позначають (ABC) . Якщо ж узяти чотири довільні точки, то через них може не проходити жодна площина. Практичною ілюстрацією цього факту може стати стілець, ніжки якого різні за довжиною. Тоді стілець буде стояти на трьох ніжках, тобто спиратися на три точки площини підлоги, а кінець четвертої ніжки (четверта «точка») не буде лежати у цій площині і тому стілець буде хитатися.

4. Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії



Теорема 1 (про існування і єдиність площини, що проходить через пряму і точку, що їй не належить). Через пряму і точку, що їй не належить, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Розглянемо пряму a і точку M , $M \notin a$ (мал. 1.10). 1) Позначимо на прямій a довільні точки C і D . Точки C , D і M не лежать на одній прямій, тому через них за аксіомою C_{IV} можна провести площину α . Точки C і D лежать у площині α , а тому за аксіомою C_{II} вся пряма a належить площині α . Отже, площина α проходить через пряму a і точку M .



Мал. 1.10

2) Доведемо, що така площина єдина. Припустимо, що через пряму a і точку M проходить ще якась площина α_1 . Але тоді ця площина має проходити і через точки C і D , що лежать на прямій a . Маємо, що через точки C , D і M , які не лежать на одній прямій, проходять дві різні площини, α і α_1 , що суперечить аксіомі C_{IV} . Отже, наше припущення хибне, а тому через пряму a і точку M , що їй не належить, проходить єдина площина α . ■

Т **Теорема 2** (про існування і єдиність площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються). **Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Доведення. Розглянемо прямі a і b , причому $a \cap b = C$ (мал. 1.11). Позначимо на прямій b точку M , а на прямій a – точку D , обидві відмінні від точки C . Маємо три точки M , C і D , які не лежать на одній прямій, а тому далі доведення аналогічні до доведення попередньої теореми. Пропонуємо завершити його самостійно. ■



Мал. 1.11

З аксіом C_{IV} та теорем 1 і 2 випливає, що площину можна задавати:

- 1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
- 2) прямою і точкою, що їй не належить;
- 3) двома прямими, що перетинаються.

Ще один спосіб задання площини розглянемо пізніше.

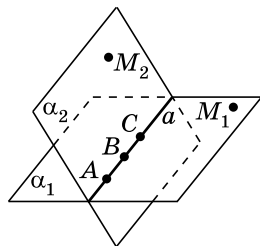
Задача 1. Довести, що через три точки, які лежать на одній прямій, можна провести площину. Скільки існує таких площин?

Доведення. Нехай точки A , B і C лежать на одній прямій – прямій a (мал. 1.12). 1) За аксіомою 1 існує точка, що прямій a не належить, назовемо її M_1 . За теоремою 1 через пряму a і точку M_1 можна провести площину, назовемо її α_1 . Вона проходить через три дані точки.

2) За аксіомою C_1 існують точки, які не належать площині α_1 . Розглянемо точку M_2 , яка не належить площині α_1 , а тому не належить і прямій a , оскільки $a \subset \alpha_1$. Тоді через пряму a і точку M_2 можна провести площину α_2 . Ця площина також, як і площина α_1 , проходить через три дані точки.

Міркуючи аналогічно, можна дійти висновку, що існує безліч площин, які проходять через три точки, що лежать на одній прямій.

Відповідь. Безліч.

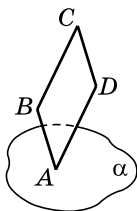


Мал. 1.12

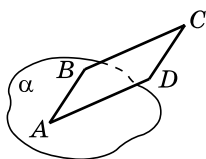
Задача 2. Дано площину α і паралелограм $ABCD$. Чи може площині α належати:

- 1) тільки одна вершина паралелограма;
- 2) тільки дві вершини паралелограма;
- 3) тільки три вершини паралелограма?

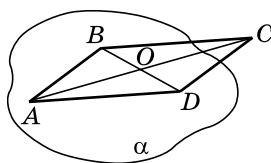
Розв'язання. У випадках 1) і 2) може (мал. 1.13 та 1.14).



Мал. 1.13



Мал. 1.14



Мал. 1.15

3) Припустимо, що три вершини паралелограма A , B і D належать площині α , а вершина C – ні (мал. 1.15). Проведемо діагоналі паралелограма AC і BD . Нехай O – точка їх перетину. Оскільки $B \in \alpha$ і $D \in \alpha$, то $BD \subset \alpha$, а тому $O \in \alpha$. Оскільки $A \in \alpha$ і $O \in \alpha$, то $AO \subset \alpha$. Але $C \in AO$, тому $C \in \alpha$. Маємо, що всі чотири вершини паралелограма належать площині α , що суперечить умові. Отже, наше припущення хибне, а тому тільки три із чотирьох вершин паралелограма $ABCD$ не можуть належати площині α .

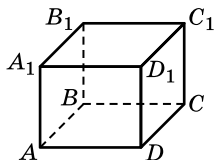
Відповідь. 1) Так; 2) так; 3) ні.

5. Найпростіші задачі з геометричними тілами

Оскільки ми вже знаємо деякі відомості про прямокутний паралелепіпед, куб і піраміду, розглянемо кілька задач, пов'язаних з цими фігурами.

Задача 3. На малюнку 1.16 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- 1) Чи належить точка C_1 площині CDD_1 ?
- 2) У якій точці пряма AB перетинає площину $B_1 C_1 C$?
- 3) Яка площина проходить через точку B і пряму CD ?
- 4) По якій прямій перетинаються площини ABC і $A_1 B_1 B$?



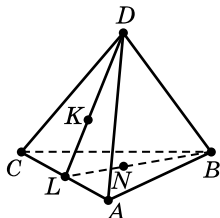
Мал. 1.16

- Розв'язання.**
- 1) Грань прямокутного паралелепіпеда $CDD_1 C_1$ належить площині CDD_1 . Тому точка C_1 належить цій площині.
 - 2) Оскільки $B \in AB$ і $B \in (B_1 C_1 C)$, то $AB \cap (B_1 C_1 C) = B$.
 - 3) Через точку B і пряму CD проходить площина BCD .
 - 4) Оскільки $AB \subset (ABC)$ і $AB \subset (A_1 B_1 B)$, то $(ABC) \cap (A_1 B_1 B) = AB$.
- Відповідь. 1) Так; 2) B ; 3) (BCD) ; 4) AB .

Задача 4. На малюнку 1.17 зображено трикутну піраміду $ABCD$. Укажіть:

- 1) усі площини, яким належить пряма KL ;
- 2) точку перетину прямої BN з площиною CAD ;
- 3) пряму перетину площин DKB і ABC .

- Розв'язання.**
- 1) $KL \subset (ACD)$, $KL \subset (DLB)$.
 - 2) Оскільки $L \in BN$ і $L \in (CAD)$, то $BN \cap (CAD) = L$.
 - 3) Оскільки $LB \subset (DKB)$ і $LB \subset (ABC)$, то $(DKB) \cap (ABC) = LB$.
- Відповідь. 1) (ACD) , (DLB) ; 2) L ; 3) LB .



Мал. 1.17

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав і узагальнив досвід грецьких математиків. Були відомі Евкліду й аксіоми стереометрії, які ми розглянули в цьому параграфі. Так, наприклад, аксіому C_{II} Евклід сформулював так: «Частини прямої лінії не можуть лежати одна над площиною, а інша – у самій площині», а аксіому C_{III} – так: «Дві площини перетинаються по прямій лінії».

Безсумнівно, «Начала» Евкліда вже понад два тисячоліття слугують зразком дедуктивної побудови геометрії. Однак математики впродовж сторіч наголошували на основному недоліку евклідових аксіом – їх неповноті, тобто недостатності їх для чіткої логічної побудови геометрії, за якої кожне твердження має бути логічно виведене з аксіом та доведених раніше тверджень.

Упродовж століть математики вдавалися до спроб дедуктивної побудови геометрії, завершився цей процес лише наприкінці XIX ст. завдяки роботам математиків М. Паша, Дж. Пеано, Дж. Веронезе, М. Пієрі, і в першу чергу завдяки видатному німецькому математику Давиду Гільберту. У своїй класичній праці «Основи геометрії» (1899) Гільберт сконструював аксіоматику геометрії таким чином, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою. Так, наприклад, Гільберт не дав прямого означення основних геометричних об'єктів: точки, прямої, площини. Те, що необхідно знати про ці об'єкти, він виклав в аксіомах, які є, по суті, їх непрямыми означеннями.



Д. Гільберт
(1862–1943)

Серед аксіом Гільберта є й аксіоми стереометрії. Наприклад, одну з аксіом цього параграфа Гільберт сформулював так: «Якщо точки A і B прямої a лежать в площині α , то будь-яка точка цієї прямої лежить в площині α ».



- Що таке стереометрія? ● Які фігури називають плоскими, а які – просторовими? Наведіть приклади плоских і просторових фігур. ● Назвіть основні поняття стереометрії. ● Як зображують та позначають площини у стереометрії? ● Сформулюйте аксіоми стереометрії. ● Сформулюйте й доведіть найпростіші наслідки з аксіом стереометрії.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



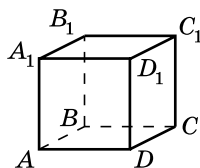
- 1.1.** Намалюйте площину α , точку M , що належить цій площині, та точку N , яка цій площині не належить. Запишіть відповідні твердження за допомогою символів.
- 1.2.** Намалюйте площину β та пряму a , що їй належить. Запишіть відповідне твердження за допомогою символів.
- 1.3.** Дано пряму m , що належить площині β . Виконайте малюнок та позначте на ньому точки A і B , які належать площині β , але не належать прямій m .
- 1.4.** Точки A і B належать площині α . Виконайте малюнок та позначте на ньому точку C , яка належить площині α , але не належить прямій AB , та точку K , яка не належить площині α .
- 1.5.** Намалюйте площину γ та пряму a , що перетинає її у точці M . Скільки точок прямої a лежить у площині γ ?

1.6. (Усно). Які з тверджень істинні:

- 1) будь-які дві точки завжди належать одній прямій;
- 2) будь-які три точки завжди належать одній прямій;
- 3) будь-які три точки завжди належать одній площині;
- 4) будь-які чотири точки завжди належать одній площині?

1.7. На малюнку 1.18 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

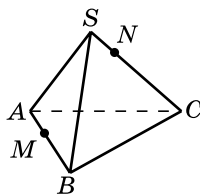
- 1) Чи належить точка C площині ABD ?
- 2) Чи належить точка B площині DCC_1 ?
- 3) У якій точці пряма AA_1 перетинає площину ABC ?
- 4) Укажіть деяку пряму, що перетинає площину $AA_1 B$.
- 5) Яка площина проходить через точку B і пряму $C_1 C$?
- 6) Укажіть деяку пряму, що належить площині $A_1 B_1 C_1$.



Мал. 1.18

1.8. На малюнку 1.19 зображено трикутну піраміду $SABC$, точку M , що належить ребру AB , та точку N , що належить ребру SC .

- 1) Чи належить точка M площині ABC ?
- 2) Чи належить точка B площині SAC ?
- 3) У якій точці пряма SB перетинає площину ABC ?
- 4) Укажіть деяку пряму, що перетинає площину SBC .
- 5) Яка площина проходить через точку N і пряму SA ?



Мал. 1.19

- 6) Укажіть деяку пряму, що належить площині SAB .

2

1.9. (Усно). Чи можуть дві різні площини мати лише:

- 1) одну спільну точку;
- 2) дві спільні точки;
- 3) три спільні точки;
- 4) 2010 спільних точок?

1.10. Чи можуть пряма і площина мати лише:

- 1) одну спільну точку;
- 2) дві спільні точки;
- 3) три спільні точки;
- 4) 999 спільних точок?

1.11. На малюнку 1.19 зображено трикутну піраміду $SABC$. Укажіть:

- 1) пряму перетину площин ASB і SMC ;
- 2) площину, яка проходить через прямі BN і SC .

1.12. На малюнку 1.18 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть:

- 1) пряму перетину площин $DD_1 C_1$ і ABD ;
- 2) площину, яка проходить через прямі $A_1 B$ і AB_1 .

1.13. (Усно). Чи однакові за змістом твердження «пряма належить площині» і «пряма й площина мають спільну точку»? Відповідь обґрунтуйте.

1.14. Відомо, що через три дані точки можна провести принаймні дві площини.

1) Яке взаємне розміщення цих точок?

2) Скільки площин можна провести через ці три точки?

1.15. Відомо, що через дані пряму і точку можна провести принаймні дві площини.

1) Яке взаємне розміщення прямої і точки?

2) Скільки площин можна провести через ці пряму і точку?

 **1.16.** Дано дві прямі, через які не можна провести площину. Чи можуть ці прямі перетинатися? Відповідь обґрунтуйте.

1.17. Дано дві площини, які не перетинаються. Чи можуть ці площини мати спільну точку? Відповідь обґрунтуйте.

1.18. Площини α і β мають спільні точки A , B і C .

1) Чи можна дійти висновку, що α і β збігаються?

2) У якому випадку можна дійти висновку, що α і β збігаються?

1.19. (Усно). Чому мотоцикл з коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоцикла без коляски потрібна додаткова опора?

1.20. Чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені двері нерухомі?

 **1.21.** Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AC і BD лежать в одній площині.

1.22. Через прямі AB і AC проведено площину. Доведіть, що цій площині належить медіана AM трикутника ABC .

1.23. Доведіть, що через будь-яку пряму і точку можна провести площину. Розгляньте два випадки.

1.24. Доведіть, що через будь-які три точки можна провести площину. Розгляньте два випадки.

1.25. Три прямі, які проходять через точку P , перетинають пряму a відповідно в точках A , B і C . Доведіть, що точки A , B , C і P лежать в одній площині.

1.26. Прямі AB і AC перетинають пряму a в точках M і N відповідно. Доведіть, що точки A , B , C , M і N лежать в одній площині.

1.27. Пряма a проходить через центр кола. Чи можна стверджувати, що пряма перетинає коло? Виконайте відповідний малюнок.

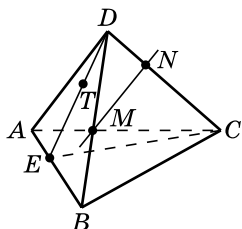
3

1.28. Пряма b проходить через центри вписаного і описаного кіл трикутника ABC . Чи можна стверджувати, що пряма b належить площині ABC ?

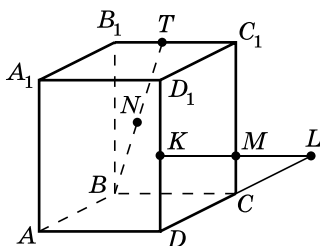
1.29. Пряма c перетинає сторони AB і AC трикутника ABC . Чи можна стверджувати, що пряма c належить площині ABC ?

1.30. На малюнку 1.20 зображено трикутну піраміду $DABC$. Укажіть:

- 1) площини, яким належать прямі TE , MN , DB , AB , EC (враховуйте всі можливі випадки);
- 2) точку перетину прямої DN з площиною ABC ; прямої CE із площиною ABD ;
- 3) точки, що належать як площині ADB , так і площині ABC ;
- 4) пряму, по якій перетинаються площини DTC і ABC .



Мал. 1.20



Мал. 1.21

1.31. На малюнку 1.21 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:

- 1) точки, що належать як площині DCC_1 , так і площині BTB_1 ;
 - 2) усі площини, яким належить пряма DL ;
 - 3) точку перетину прямої KM із площиною ABC ; прямої BN із площиною $A_1B_1C_1$;
 - 4) пряму, по якій перетинаються площини NB_1C_1 і ABC .
- 1.32. (Усно). Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стола (або стільця) в одній площині?

1.33. Площини α і β перетинаються. Пряма a належить площині α і перетинає площину β в точці A . Пряма b належить площині β і перетинає площину α в точці B . Доведіть, що AB – пряма перетину площин α і β .

1.34. Площини α і β перетинаються по прямій c . Пряма a належить площині α і перетинає площину β . Чи перетинаються прямі a і c ? Відповідь обґрунтуйте.

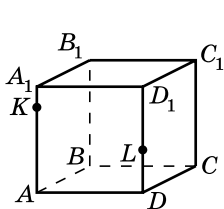
1.35. Точка M не належить площині трикутника ABC . Доведіть, що прямі MA і BC не перетинаються.

1.36. Дано пряму l і точку P , що їй не належить. Точка K не лежить у площині, що проходить через пряму l і точку P . Доведіть, що прямі l і PK не перетинаються.

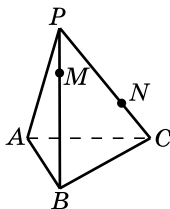
1.37. (Усно). Чи однакові за змістом твердження «прямі a і b належать різним площинам» і «прямі a і b не належать одній площині»? Відповідь обґрунтуйте.

1.38. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (мал. 1.22).

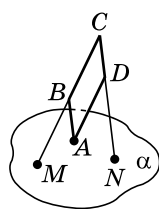
- 1) Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте точку перетину прямої KL із площиною ABC та точку перетину прямої KL із площиною $A_1 B_1 C_1$. Побудову обґрунтуйте.
- 2) За якої умови вказані точки побудувати неможливо?



Мал. 1.22



Мал. 1.23



Мал. 1.24

1.39. $PABC$ – трикутна піраміда (мал. 1.23).

- 1) Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте точку перетину прямої MN із площиною ABC . Побудову обґрунтуйте.
- 2) За якої умови вказану точку побудувати неможливо?

1.40. Дві вершини паралелограма та точка перетину його діагоналей належать площині α . Чи можна стверджувати, що дві інші вершини паралелограма також належать площині α ?

4

1.41. Вершина A опуклого плоского чотирикутника належить площині α (мал. 1.24), а вершини B , C і D не належать цій площині. Прямі CB і CD перетинають площину α відповідно в точках M і N . Чи правильно виконано малюнок 1.24? Відповідь обґрунтуйте.

1.42. Вершина D плоского чотирикутника $ABCD$ належить площині β , а всі інші вершини – їй не належать. Прямі BC і AC перетинають площину β відповідно в точках K і L . Доведіть, що точки K , L і D лежать на одній прямій.

1.43. $PABC$ – трикутна піраміда (мал. 1.23). Пряма MN не паралельна прямій BC . Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте пряму перетину площин AMN і ABC . Побудову обґрунтуйте.

1.44. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 1.22).

Пряма KL не паралельна прямій AD . Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте пряму перетину площин KLC і ABC . Побудову обґрунтуйте.

 **1.45.** 1) Нехай A, B, C – три точки простору. Доведіть для простору нерівність $AB \leq BC + CA$.

2) Скільки площин можна провести через точки M, N і P , якщо $MN = 0,5$ дм, $NP = 40$ мм, $MP = 8$ см?

1.46. Скільки площин можна провести через точки K, L і M , якщо $KL = 5$ см, $LM = 110$ мм, $KM = 0,6$ дм?

1.47. Кожна з трьох прямих перетинається із двома іншими. Скільки різних площин можна провести через дані прямі, взяті попарно? Укажіть і обґрунтуйте всі можливі випадки.

1.48. Основи трьох бісектрис трикутника належать площині α . Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

1.49. Середини трьох сторін трикутника належать площині α . Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

1.50. Основи трьох висот трикутника належать площині β . Чи можна стверджувати, що площині β належать і вершини трикутника?



Життєва математика

1.51. Відношення висоти до ширини екрана монітора дорівнює $9 : 16$. Діагональ екрана монітора дорівнює 40 дюймів. Знайдіть ширину екрана в сантиметрах.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.52. На площині дано пряму m і точку A , що цій прямій не належить. Скільки прямих, паралельних прямій m , можна провести через точку A ?

1.53. $ABCD$ – паралелограм. У площині паралелограма проведено пряму KL , паралельну BC . Доведіть, що $KL \parallel AD$.