

## Шановні десятикласники та десятикласниці!

Протягом навчання в 10–11 класах ви будете опановувати курс «Алгебра і початки аналізу», у якому об'єднано матеріал кількох галузей математичної науки. Цей курс дасть вам змогу оволодіти такою системою знань з алгебри і початків аналізу та набути таких компетентностей, які будуть потрібні не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності і яких буде достатньо для продовження навчання у вищих навчальних закладах.

У 10 класі велику увагу приділено перетворенню виразів, розв'язуванню рівнянь, нерівностей, ви також дізнаєтеся про нові важливі властивості функцій, значно розширите відомості з тригонометрії, почнете вивчати новий курс – *початки аналізу*.

Вивчення алгебри і початків аналізу потребуватиме від вас наполегливості та логіки мислення.

Розглянемо особливості підручника та роботи з ним. Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, пунктів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої роботи, проєктної діяльності тощо. Теоретичний матеріал підручника викладено простою, доступною мовою, проілюстровано малюнками та великою кількістю прикладів розв'язування задач.

Для зручності в підручнику використано такі умовні позначення:

 – важливий матеріал (означення, математичні твердження, властивості, алгоритми), який треба запам'ятати;



– запитання і завдання до вивченого теоретичного матеріалу;



– теорема;



– наслідки;



– закінчення доведення;



– «ключова» задача (задача, висновок якої використовують під час розв'язування інших задач);

1.2 – вправа для виконання у класі;

1.3 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки  починаються вправи початкового рівня;

з позначки  починаються вправи середнього рівня;

з позначки  починаються вправи достатнього рівня;

з позначки  починаються вправи високого рівня.

Рубрика  «Розв'яжіть задачі та виконайте вправи» містить значну кількість завдань для класної і домашньої роботи, усних вправ, практичних завдань, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати.  «Вправи підвищеної складності» допоможуть поглибити знання з алгебри і початків аналізу та сприятимуть підготовці до різноманітних математичних змагань. У рубриці  «Життєва математика» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю

і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, – усім тим, що знадобиться кожному в повсякденному житті. У рубриці  **«Підготуйтеся до вивчення**

**нового матеріалу»** пропонується виконати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми. Рубрика



**«Цікаві задачі для учнів неледачих»** містить нестандартні задачі, задачі математичних олімпіад різних країн світу, а також задачі, авторами яких є видатні математики.

Завітавши на сайт видавництва «Гене́за» [www.geneza.ua](http://www.geneza.ua), ви зможете перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання, якщо виконаєте завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**. На сайті ви також знайдете повну версію відповідей до завдань підручника та тестові завдання з алгебри і початків аналізу, які не увійшли в цей підручник, але допоможуть систематизувати і узагальнити знання з предмета та готуватися до зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

У підручнику також подано багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку математичної науки.

*Бажаємо вам успіхів у навчанні!*

### ***Шановні вчительки та вчителі!***

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів алгебри і початків аналізу. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він повною мірою реалізував мету державної програми з математики; сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності; забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури; формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість.

Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, пункти, рубрики) та поділу навчального матеріалу на теоретичну і практичну складові, підручник містить рубрику **«Життєва математика»**, що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та допоможе формуванню в учнів предметних і ключових компетентностей. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** і **«Вправи підвищеної складності»** допоможуть забезпечити особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення алгебри і початків аналізу.

У підручнику включено велику кількість задач і вправ. Крім того, на сайті видавництва «Гене́за» [www.geneza.ua](http://www.geneza.ua) розміщено додаткові завдання для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу до кожного розділу та повну версію відповідей до задач і вправ цього підручника.

*Щастя вам у вашій нелегкій праці!*

# РОЗДІЛ 1



# ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ...

- **пригадаємо** деякі основні властивості функцій; графіки і властивості основних видів функцій; перетворення графіків функцій; відомості про рівняння та нерівності; поняття множини;
- **ознайомимося** з поняттями оборотної і оберненої функцій; теоремою Безу; методом математичної індукції;
- **навчимося** знаходити об'єднання та переріз множин; функцію, обернену до даної; розв'язувати рівняння за допомогою властивостей функцій; розв'язувати рівняння та нерівності з параметрами; застосовувати метод інтервалів; ділити многочлени.

## § 1. МНОЖИНА. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

У цьому параграфі згадаємо відомі вам *числові множини* та розширимо саме поняття *множини*.

### 1. Числові множини. Множина дійсних чисел

Поняття числа є одним з основних у курсі математики. Уявлення про числа (натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні) у людства склалися поступово, у процесі практичної діяльності. Усі вищезгадані види чисел вам траплялися у шкільному курсі математики. Нагадаємо основні види числових множин.

Через потребу в лічбі предметів з'явилися *натуральні числа*.



Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , які використовують для лічби предметів, називають *натуральними числами*.

Множину натуральних чисел позначають літерою  $N$ . Нагадаємо, що запис  $2 \in N$  означає, що число 2 належить множині натуральних чисел, а запис  $\frac{2}{3} \notin N$  означає, що число  $\frac{2}{3}$  не належить множині натуральних чисел.

Уперше *від'ємні числа* з'явилися у Стародавньому Китаї приблизно 2100 років тому, там їх тлумачили як борг.

Числа  $n$  і  $-n$  називають *протилежними*. Наприклад, протилежними є числа 5 і  $-5$ ,  $-0,8$  і  $0,8$ .



**Натуральні числа, протилежні їм числа та число 0 утворюють множину цілих чисел.**

Множину цілих чисел позначають літерою  $Z$ .

Потреба у вимірюванні величин призвела до появи дробових чисел. Так, наприклад, довжина мотузки може становити 37 см, або  $\frac{37}{100}$  м, або 0,37 м, а середня маса ящика з фруктами – 12,7 кг.



**Цілі та дробові числа складають множину раціональних чисел.**

Множину раціональних чисел позначають літерою  $Q$ . Нагадаємо, що *будь-яке раціональне число можна записати у вигляді  $\frac{m}{n}$ , де  $m$  – ціле число, а  $n$  – натуральне.*

$$\text{Наприклад, } 10 = \frac{10}{1}; -2\frac{1}{3} = \frac{-7}{3}; 0,8 = \frac{4}{5}; -3,17 = \frac{-317}{100}.$$

Раціональне число можна також подати у вигляді десяткового дробу, для цього чисельник дробу треба поділити на його знаменник.

$$\text{Наприклад, } \frac{5}{8} = 0,625; -\frac{7}{4} = -1,75; \frac{10}{33} = 0,303030\dots = 0,(30).$$

В останньому випадку отримали нескінченний періодичний дріб.

У практичній діяльності людини трапляються числа, які не є раціональними. Наприклад, гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом завдовжки 1 м дорівнює  $\sqrt{2}$  м. Число  $\sqrt{2}$  не можна подати у вигляді  $\frac{m}{n}$ .



**Числа, які не можна подати у вигляді  $\frac{m}{n}$ , де  $m$  – ціле число, а  $n$  – натуральне число, називають ірраціональними числами.**

Нагадаємо, що *кожне ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.*

Раціональні числа разом з ірраціональними утворюють множину дійсних чисел. Цю множину позначають літерою  $R$ .

Прикладами ірраціональних чисел є також числа  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ ,  $-\sqrt{11}$  тощо. Наближені значення цих чисел (тобто округлені до деякого розряду) можна знаходити з певною точністю за допомогою калькулятора або комп'ютера:

$$\sqrt{3} \approx 1,7320508; \quad \pi \approx 3,1415926; \quad -\sqrt{11} \approx -3,3166248.$$

## 2. Поняття множини. Підмножина

Крім множин, які ми розглянули вище, розглядають й інші множини. Поняття множини в більш широ-

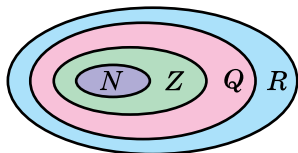
кому розумінні є одним з основних у математиці і тому не має означення. Під поняттям множини будемо розуміти певну сукупність об'єктів будь-якої природи, самі об'єкти при цьому називатимемо *елементами множини*.

Зазвичай множини позначають великими латинськими літерами. Якщо, наприклад, множина  $A$  складається із чисел 1, 2, 3, а множина  $B$  зі знаків  $*$  і  $!$ , то це записують так:  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{*, !\}$ . Числа 1, 2, 3 – елементи множини  $A$ , а знаки  $*$ ,  $!$  – елементи множини  $B$ . Той факт, що число 1 належить множині  $A$ , записують за допомогою відомого вам символу належності:  $1 \in A$ , а те, що число 1 не належить множині  $B$ , записують так:  $1 \notin B$ .

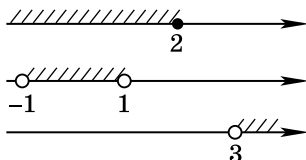
Множини, кількість елементів яких можна записати натуральним числом, називають *скінченними*. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною*. Її позначають символом  $\emptyset$ . Так, наприклад, порожньою є множина розв'язків рівняння  $x^2 + 1 = 0$ .

Множини, кількість елементів яких не можна записати натуральним числом і які не є порожніми, називають *нескінченними*. Нескінченними множинами є, наприклад, множини  $N, Z, Q, R$ . Також до нескінченних множин належать відомі вам *числові проміжки*. Наприклад, проміжки  $(-\infty; 2]$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(3; +\infty)$  є нескінченними множинами. Якщо кінці проміжка йому не належать, такий проміжок ще називають *інтервалом*.

Множини зручно зображувати за допомогою *діаграм (кругів) Ейлера–Венна* (мал. 1.1). Множини, що є числовими проміжками, зручно зображувати на числовій прямій штрихуванням (мал. 1.2).



Мал. 1.1

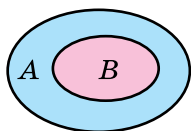


Мал. 1.2



Якщо кожен елемент множини  $B$  є елементом множини  $A$ , то кажуть, що множина  $B$  є підмножиною множини  $A$ .

Записують це так:  $B \subset A$ . Схематичну ілюстрацію цього факту подано на малюнку 1.3.



Мал. 1.3

**Приклад 1.** Нехай  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,

- $C = \{4, 5\}$ . Тоді множина  $B$  є підмножиною множини  $A$ :  $B \subset A$ .
- Множина  $C$  не є підмножиною множини  $A$ , оскільки множина  $C$  містить елемент 5, якого не містить множина  $A$ .

Для вищезгаданих числових множин можна записати:  $N \subset Z$ ,  $Z \subset Q$ ,  $N \subset Q$ ,  $Z \subset R$  тощо.

Уважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

### 3. Операції над множинами

Розглянемо деякі операції (дії), які можна виконувати над множинами.



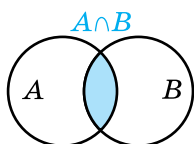
**Переріз множин  $A$  і  $B$**  називають множиною, що складається з усіх елементів, які належать як множині  $A$ , так і множині  $B$ .

Переріз множин, як і переріз проміжків, записують за допомогою знака  $\cap$ .

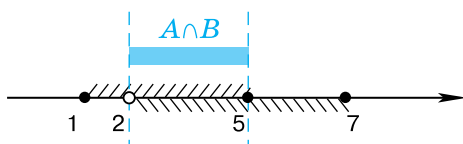
**Приклад 2.**  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  $C = \{4, 5\}$ . Тоді

•  $A \cap B = \{2, 3\}$ ,  $A \cap C = \emptyset$ .

Переріз множин зручно зображувати на діаграмах (мал. 1.4), а для числових проміжків – на числовій прямій, наприклад,  $[1; 5] \cap (2; 7] = (2; 5]$  (мал. 1.5).



Мал. 1.4



Мал. 1.5



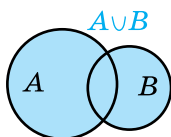
**Об'єднання множин  $A$  і  $B$**  називають множиною, що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній із множин  $A$  або  $B$ .

Об'єднання множин, як і об'єднання проміжків, записують за допомогою знака  $\cup$ .

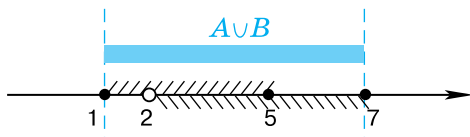
**Приклад 3.**  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  $C = \{4, 5\}$ . Тоді

•  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Об'єднання множин також зручно зображувати на діаграмах (мал. 1.6), а для числових проміжків – на числовій прямій, наприклад,  $[1; 5] \cup (2; 7] = [1; 7]$  (мал. 1.7).



Мал. 1.6



Мал. 1.7



• Які числа утворюють множину натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел; ірраціональних чисел? • Які числа утворюють множину дійсних чисел? • Як позначають множини

натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел? • Що розуміють під поняттям множини? • Що називають елементами множини? • Коли множину  $B$  називають підмножиною множини  $A$ ? • Які множини називають скінченними; нескінченними? • Що таке порожня множина? • Що називають перерізом множин? • Що називають об'єднанням множин?



## Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



**1.1. (Усно).** Чи правильно, що:

- 1) 7 – натуральне число;                      2) 3,2 – ціле число;  
3)  $\sqrt{8}$  – раціональне число;                      4)  $-\frac{8}{9}$  – дійсне число?

**1.2.** Із чисел  $\sqrt{2}$ ;  $-3\frac{1}{8}$ ; 49;  $-4,(2)$ ;  $\pi$ ;  $-17$ ;  $-8,9$ ; 0;  $-\sqrt{7}$ ; 0,444... випишіть:

- 1) натуральні числа;                      2) цілі невід'ємні числа;  
3) раціональні від'ємні числа;                      4) ірраціональні числа.

**1.3.** Із чисел 5;  $-\sqrt{3}$ ;  $-8$ ;  $\frac{7}{9}$ ;  $\sqrt{19}$ ;  $2,(8)$ ;  $-\sqrt{15}$ ;  $-2\frac{7}{11}$ ; 0; 3,148 випишіть:

- 1) натуральні числа;                      2) цілі недодатні числа;  
3) раціональні додатні числа;                      4) ірраціональні числа.

**1.4. (Усно).** Наведіть приклади скінченних і нескінченних множин.

**1.5. (Усно).** Назвіть елементи множини:

- 1)  $A = \{4, 7, 11, 18\}$ ;                      2)  $B = \{\triangle, \square, \circ\}$ .

Яким числовим множинам ( $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$ ) належить число (1.6–1.7):

**1.6.** 1) 7,3;                      2)  $-5\frac{2}{9}$ ;                      3)  $\pi$ ;                      4) 0;

5)  $\sqrt{13}$ ;                      6)  $-7$ ;                      7)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;                      8) 15?

**1.7.** 1)  $-9,3$ ;                      2)  $5\frac{8}{9}$ ;                      3) 7;                      4)  $\sqrt{18}$ ;                      5)  $\frac{\pi}{8}$ ;                      6) 113,7?

Зобразіть на числовій прямій проміжок (1.8–1.9):

**1.8.** 1)  $(-4; 2]$ ;                      2)  $[-1; +\infty)$ ;                      3)  $(-\infty; 4)$ ;                      4)  $[-2; 1]$ .

**1.9.** 1)  $[4; 6]$ ;                      2)  $(-\infty; 3]$ ;                      3)  $(2; +\infty)$ ;                      4)  $(3; 4)$ .

**1.10.** З множини  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{6}{5}, \frac{7}{3}, \frac{1}{8}\right\}$  виділіть підмножину:

- 1) правильних дробів;                      2) неправильних дробів.

**1.11.** З множини  $\{26, 37, 41, 38, 46\}$  виділіть підмножину:

- 1) парних чисел;                      2) непарних чисел.

**1.12. (Усно).** Чи правильно, що:

- 1)  $8 \notin N$ ;      2)  $-13 \in Z$ ;      3)  $4 \notin Q$ ;      4)  $48 \in R$ ;  
5)  $-4,2 \notin N$ ;      6)  $-8,3 \in Q$ ;      7)  $-4,8 \notin R$ ;      8)  $\sqrt{7} \in Q$ ;  
9)  $\sqrt{1} \in N$ ;      10)  $-\sqrt{15} \notin R$ ;      11)  $\sqrt{\frac{9}{16}} \notin Z$ ;      12)  $\sqrt{1\frac{7}{9}} \in Q$ ?

**1.13.** Множина  $C$  складається з усіх дійсних коренів рівняння  $x^2 = -9$ . Що це за множина?

**1.14.** Множина  $D$  складається з усіх дійсних коренів рівняння  $|x| = -5$ . Що це за множина?

**1.15. (Усно).** Наведіть приклади порожніх множин.

**2** Чи правильне твердження (1.16–1.17):

**1.16.** 1)  $N \subset Z$ ;      2)  $Q \subset Z$ ;      3)  $N \subset R$ ;      4)  $R \subset Q$ ?

**1.17.** 1)  $Q \subset N$ ;      2)  $N \subset Q$ ;      3)  $Z \subset R$ ;      4)  $R \subset N$ ?

**1.18.** Чи правильне твердження, що  $A \subset B$ , якщо:

- 1)  $A = \{2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ;      2)  $A = \{\triangle, \square\}$ ,  $B = \{\triangle, ?, !\}$ ;  
3)  $A = \emptyset$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ;      4)  $A = \{a, v, b\}$ ,  $B = \{a\}$ ;  
5)  $A$  – множина простих чисел,  $B$  – множина цілих чисел;  
6)  $A$  – множина натуральних чисел,  $B$  – множина натуральних чисел, кратних числу 10?

**1.19.** Чи правильне твердження, що  $C \subset D$ , якщо:

- 1)  $C = \{1, 3\}$ ,  $D = \{1, 5, 9\}$ ;      2)  $C = \{\triangle, !\}$ ,  $D = \{\triangle, \square, \circ, !\}$ ;  
3)  $C = \{a, c, d\}$ ,  $D = \emptyset$ ;      4)  $C = \{\triangle, \circ\}$ ,  $D = \{\triangle, \circ\}$ ?

**1.20.** Знайдіть об'єднання та переріз множин  $C$  і  $D$ , якщо:

- 1)  $C = \{1, 2, 3\}$ ,  $D = \{1, 2, 5\}$ ;      2)  $C = \{*\}$ ,  $D = \{*, \triangle\}$ ;  
3)  $C$  – множина дільників числа 6,  $D$  – множина дільників числа 8;  
4)  $C$  – множина коренів рівняння  $x^2 = 4$ ,  $D$  – множина коренів рівняння  $|x| = -1$ .

**1.21.** Знайдіть об'єднання та переріз множин  $A$  і  $B$ , якщо:

- 1)  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{3, 5\}$ ;  
2)  $A = \emptyset$ ,  $B = \{\triangle, \square\}$ ;  
3)  $A$  – множина простих чисел, менших за 10,  $B$  – множина непарних натуральних чисел, менших за 10;  
4)  $A$  – множина коренів рівняння  $|x| = 3$ ,  $B$  – множина коренів рівняння  $2x + 6 = 0$ .

**1.22.** Знайдіть найменше ціле число, що належить проміжку:

- 1)  $(0; 5)$ ;      2)  $\left(-\frac{1}{2}; 1\frac{3}{7}\right)$ ;      3)  $[5; 11)$ ;      4)  $(0,88; +\infty)$ .

**1.23.** Знайдіть найбільше ціле число, що належить проміжку:

- 1)  $(-3; 8)$ ;      2)  $(-\infty; 3,7)$ ;      3)  $[0; 16,3)$ ;      4)  $(-5; 0,98)$ .

**1.24.** Множина  $K$  складається з розв'язків рівняння  $|x| - 4 = 0$ , а множина  $L$  – з розв'язків рівняння  $x^2 = 16$ . Чи правильно, що множина  $K$  є підмножиною множини  $L$ ? А навпаки?

**1.25.** Множина  $C$  складається з розв'язків рівняння  $(x+1)(x-2)=0$ , а множина  $D$  – з розв'язків рівняння  $x^2 - x - 2 = 0$ . Чи правильно, що множина  $C$  є підмножиною множини  $D$ ? А навпаки?

**3** **1.26.** Запишіть усі підмножини множини  $A = \{0, 1, 2\}$ , які містять:

1) один елемент; 2) два елементи; 3) три елементи.

**1.27.** Запишіть усі підмножини множини  $B = \{\Delta, *, !\}$ , які містять:

1) один елемент; 2) два елементи; 3) три елементи.

Зобразіть на числовій прямій дані проміжки та знайдіть їх переріз і об'єднання (**1.28–1.29**):

**1.28.** 1)  $[-1; 4]$  і  $(0; 7)$ ; 2)  $[1; 2]$  і  $(-1; 7)$ ;  
3)  $(-\infty; 3)$  і  $(2; +\infty)$ ; 4)  $(-\infty; 0)$  і  $(7; +\infty)$ .

**1.29.** 1)  $[4; 7]$  і  $(5; 9]$ ; 2)  $[0; 1)$  і  $(-2; 3)$ ;  
3)  $[-2; 3)$  і  $[4; 7)$ ; 4)  $(-\infty; 0)$  і  $[-1; +\infty)$ .

**1.30.** Знайдіть переріз і об'єднання множин  $A$  і  $B$ , якщо:

1)  $A \subset B$ ;

2)  $A$  – порожня множина,  $B$  – не є порожньою множиною.

**1.31.** Чи належить проміжку  $[1,5; 3,4]$  число:

1)  $\sqrt{2}$ ; 2)  $\sqrt{5}$ ; 3)  $\sqrt{11}$ ; 4)  $\sqrt{13}$ ?

**1.32.** Чи належить проміжку  $[1,8; 3,9)$  число:

1)  $\sqrt{3}$ ; 2)  $\sqrt{7}$ ; 3)  $\sqrt{15}$ ; 4)  $\sqrt{17}$ ?

**4** **1.33.** Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера–Венна множини  $A$ ,  $B$  і  $C$ , якщо  $A \subset C$ ,  $B \subset C$  і  $C = A \cup B$ .

**1.34.** Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера–Венна множини  $A$ ,  $B$  і  $C$ , якщо  $B \subset A$ ,  $C \subset A$  і  $B \cap C \neq \emptyset$ .

**1.35.** Нехай  $A$  – множина парних натуральних чисел,  $B$  – множина непарних натуральних чисел,  $C$  – множина натуральних чисел, кратних числу 3. Запишіть за допомогою даних множин та знаків операцій над множинами:

1) множину натуральних чисел;

2) множину натуральних чисел, кратних 6;

3) множину непарних натуральних чисел, кратних 3.

**1.36.** Нехай  $A$  – множина парних натуральних чисел,  $B$  – множина непарних натуральних чисел,  $C$  – множина натуральних чисел, кратних числу 5. Запишіть за допомогою даних множин та знаків операцій над множинами:

1) множину натуральних чисел, кратних 2 або 5;

2) множину натуральних чисел, кратних 10;

3) множину непарних натуральних чисел, кратних 5.

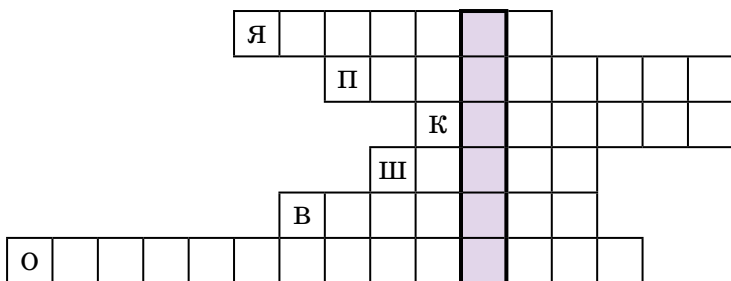


**1.37.** Система навігації, що вбудована у спинку крісла літака, інформує пасажирів про те, що політ проходить на висоті 40 000 футів. Запишіть висоту польоту в кілометрах.





**1.38. (Видатні українські математики).** Запишіть по горизонталях прізвища видатних українських математиків, перші літери яких уже зазначено, та про більшість з яких вам відомо з підручників попередніх класів. Також, за потреби, можна використати додаткову літературу та Інтернет. Якщо прізвища запишете правильно, то у виділеному стовпчику отримаєте алгебраїчний термін, більше відомостей про який знайдете в наступних параграфах.



*Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу*

**1.39.** Знайдіть область визначення функції:

- 1)  $y = 2x + 1$ ;      2)  $y = \frac{x}{3}$ ;      3)  $y = \frac{3}{x}$ ;  
 4)  $y = \sqrt{x}$ ;      5)  $y = \sqrt{x - 2}$ ;      6)  $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{3 - x}$ .

**1.40.** Дано функцію  $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ . Знайдіть:

- 1)  $g(-2)$ ;      2)  $g(1)$ ;      3)  $g(0)$ ;      4)  $g(3)$ .

**1.41.** Дано функцію  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$  Знайдіть:

- 1)  $f(-5)$ ;      2)  $f(0)$ ;      3)  $f(1)$ ;      4)  $f(100)$ .

**1.42.** Що є графіком функції:

- 1)  $y = -4x + 5$ ;      2)  $y = \frac{8}{x}$ ;      3)  $y = 7$ ;  
 4)  $y = 2x - x^2$ ;      5)  $y = \sqrt{x}$ ;      6)  $y = x^2 + 3x - 4$ ?

**1.43.** Побудуйте графік функції:

- 1)  $y = 2x - 1$ ;      2)  $y = -\frac{6}{x}$ ;  
 3)  $y = -3$ ;      4)  $y = x^2 + 4x - 5$ .

# ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

## РОЗДІЛ 3



### У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ...

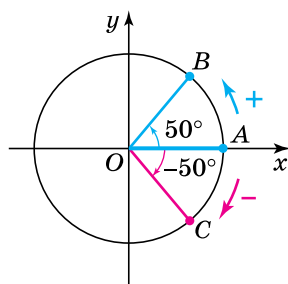
- пригадаємо відомості з геометрії про синус, косинус і тангенс кута трикутника;
- дізнаємося про радіанну міру кута; тригонометричні функції кутів та числових аргументів; основні співвідношення між тригонометричними функціями;
- навчимося переходити від радіанної міри кута до градусної і навпаки; перетворювати тригонометричні вирази та обчислювати їх значення; будувати графіки тригонометричних функцій.

## § 17. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС І КОТАНГЕНС КУТА

З курсу геометрії ви вже знаєте, що таке синус, косинус і тангенс кута  $\alpha$ , де  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . У цьому параграфі ознайомимося з поняттями синуса, косинуса і тангенса довільного кута, а також з поняттям котангенса кута.

### 1. Кути довільної величини

Розглянемо коло радіуса  $R$  із центром у початку координат (мал. 17.1). Позначимо на додатній півосі абсцис точку  $A$ , яка належить колу. Радіус  $OA$  будемо називати *початковим радіусом*.



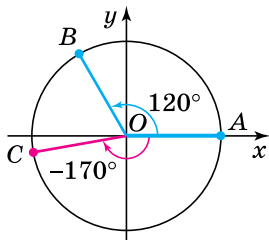
Мал. 17.1

Повернемо радіус  $OA$  навколо точки  $O$  на  $50^\circ$  проти руху годинникової стрілки, отримаємо радіус  $OB$ . Кут  $AOB$ , який при цьому утворився, називають *кутом повороту*. У нашому випадку кут повороту дорівнює  $50^\circ$ . Повернемо тепер початковий радіус  $OA$  на кут  $50^\circ$  у напрямку руху годинникової стрілки, отримаємо радіус  $OC$ . У цьому випадку кут повороту дорівнює  $-50^\circ$ . На малюнку 17.1 стрілками вказано кути повороту  $50^\circ$  і  $-50^\circ$  та напрям повороту. Узагалі,

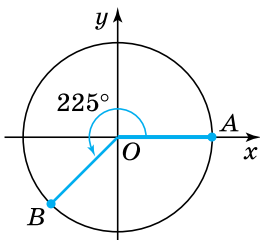


при повороті початкового радіуса проти руху годинникової стрілки кут повороту вважають додатним, а за рухом годинникової стрілки – від'ємним (мал. 17.1).

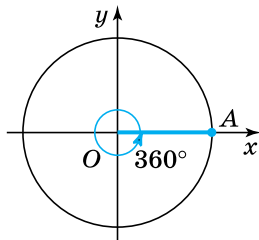
Кут повороту може бути будь-яким числом. На малюнку 17.2 маємо кути повороту  $120^\circ$  і  $-170^\circ$ .



Мал. 17.2



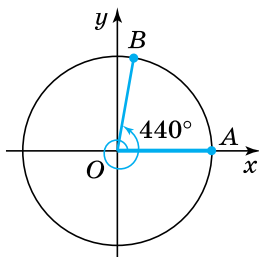
Мал. 17.3



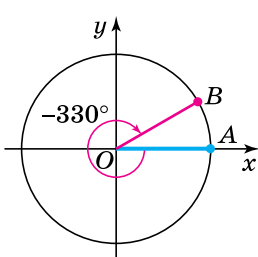
Мал. 17.4

Покажемо кут повороту  $225^\circ$ . Оскільки  $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ , повернемо початковий радіус  $OA$  в додатному напрямі на  $180^\circ$ , а потім у тому ж напрямі ще на  $45^\circ$  (мал. 17.3). Якщо початковий радіус виконає повний оберт проти руху годинникової стрілки, то отримаємо кут повороту  $360^\circ$  (мал. 17.4). Початковий радіус можна повернути і більш ніж на повний оберт, наприклад на малюнку 17.5 маємо кут повороту  $440^\circ$ .

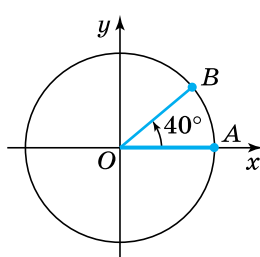
Якщо початковий радіус повернути за рухом годинникової стрілки на  $330^\circ$ , тобто у від'ємному напрямі, отримаємо кут повороту  $-330^\circ$  (мал. 17.6).



Мал. 17.5



Мал. 17.6



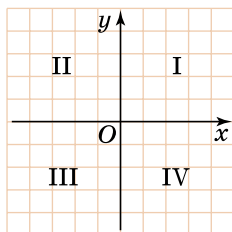
Мал. 17.7

Нехай при повороті на  $40^\circ$  початковий радіус  $OA$  перейшов у радіус  $OB$  (мал. 17.7). Якщо після цього радіус  $OB$  повернути на кут  $360^\circ$  або  $-360^\circ$ , то знову отримаємо радіус  $OB$ . Із цього можна дійти висновку, що радіус  $OA$  переходить у радіус  $OB$  як при повороті на кут  $40^\circ + 360^\circ = 400^\circ$ , так і при повороті на кут  $40^\circ - 360^\circ = -320^\circ$ , та й узагалі при повороті на кут  $40^\circ + 360^\circ k$ , де  $k$  – будь-яке ціле число, тобто  $k \in \mathbb{Z}$ .

Очевидно, що й будь-який кут  $\alpha$  можна подати у вигляді  $\alpha = \alpha_0 + 360^\circ k$ , де  $0 \leq \alpha_0 < 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Наприклад,  $1100^\circ = 20^\circ + 360^\circ \cdot 3$ , а  $-640^\circ = 80^\circ + 360^\circ \cdot (-2)$ .

- Приклад 1.** Серед кутів повороту  $460^\circ$ ,  $-270^\circ$ ,  $810^\circ$ ,  $-660^\circ$
- знайти ті, при повороті на які початковий радіус приймає те саме положення, що й при повороті на кут  $90^\circ$ .
  - Розв'язання. Оскільки  $460^\circ = 100^\circ + 360^\circ \cdot 1$ ;
  - $-270^\circ = 90^\circ + 360^\circ \cdot (-1)$ ;  $810^\circ = 90^\circ + 360^\circ \cdot 2$ ;
  - $-660^\circ = 60^\circ + 360^\circ \cdot (-2)$ , то такими є кути  $-270^\circ$  і  $810^\circ$ .
  - Відповідь.  $-270^\circ$  і  $810^\circ$ .

Нагадаємо, що координатні осі ділять координатну площину на чотири чверті (мал. 17.8). Нехай при повороті на кут  $\alpha$  початковий радіус  $OA$  перейшов у радіус  $OB$ . тоді кут  $\alpha$  називають кутом тої чверті, у якій міститься радіус  $OB$ . Так, наприклад,  $\alpha = 50^\circ$  – кут першої чверті (мал. 17.1),  $\alpha = 120^\circ$  – кут другої чверті (мал. 17.2),  $\alpha = 225^\circ$  – кут третьої чверті (мал. 17.3),  $\alpha = -50^\circ$  – кут четвертої чверті (мал. 17.1).



Мал. 17.8

Кути  $0^\circ$ ;  $\pm 90^\circ$ ;  $\pm 180^\circ$ ;  $\pm 270^\circ$ ;  $\pm 360^\circ$ ; ... не належать жодній чверті.

- Приклад 2.** Кутом якої чверті є кут: 1)  $1999^\circ$ ; 2)  $-2010^\circ$ ?

- Розв'язання.
- 1)  $1999^\circ = 199^\circ + 360^\circ \cdot 5$ , отже,  $1999^\circ$  – кут III чверті.
- 2)  $-2010^\circ = 150^\circ + 360^\circ \cdot (-6)$ , отже,  $-2010^\circ$  – кут II чверті.
- Відповідь. 1) кут III чверті; 2) кут II чверті.

## 2. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса

Нехай при повороті на кут  $\alpha$  початковий радіус  $OA$  перейшов у радіус  $OB$ , причому точка  $B$  має координати  $(x; y)$  (мал. 17.9).



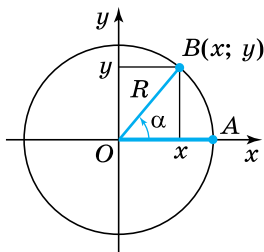
**Синусом кута  $\alpha$**  називають відношення ординати точки  $B$  до довжини радіуса:  $\sin \alpha = \frac{y}{R}$ .

**Косинусом кута  $\alpha$**  називають відношення абсциси точки  $B$  до довжини радіуса:  $\cos \alpha = \frac{x}{R}$ .

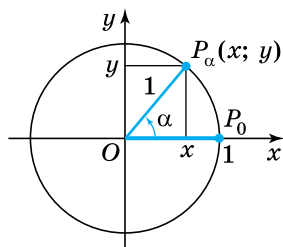
**Тангенсом кута  $\alpha$**  називають відношення ординати точки  $B$  до її абсциси:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

**Котангенсом кута  $\alpha$**  називають відношення абсциси точки  $B$  до її ординати:  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ ,  $y \neq 0$ .

Зауважимо, що вказані означення не суперечать означенням синуса, косинуса і тангенса кутів від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , раніше введеним у геометрії.



Мал. 17.9



Мал. 17.10

### 3. Одиничне коло

Як відомо з курсу геометрії, значення виразів  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  і  $\operatorname{tg} \alpha$ , де  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , залежать лише від градусної міри кута  $\alpha$  і не залежать від довжини радіуса  $R$ . Тому зручно розглядати коло з радіусом  $R = 1$  і центром у початку координат (мал. 17.10). Таке коло називають **одиничним колом**.

Нехай при повороті на кут  $\alpha$  початковий радіус  $OP_0$  переходить у радіус  $OP_\alpha$ , де точка  $P_\alpha$  має координати  $(x; y)$  (мал. 17.10). Кажуть, що куту  $\alpha$  відповідає точка  $P_\alpha$  одиничного кола. Тоді



**синусом кута  $\alpha$**  називають ординату точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола, тобто  $\sin \alpha = y$ ;

**косинусом кута  $\alpha$**  називають абсцису точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола, тобто  $\cos \alpha = x$ ;

**тангенсом кута  $\alpha$**  називають відношення ординати точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола до її абсциси, тобто  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$ ;

**котангенсом кута  $\alpha$**  називають відношення абсциси точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола до її ординати, тобто  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ ,  $y \neq 0$ .

Означення тангенса можна сформулювати й так:



**тангенсом кута  $\alpha$**  називають відношення синуса цього кута до його косинуса.

Справді, оскільки  $y = \sin \alpha$ , а  $x = \cos \alpha$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , де  $\cos \alpha \neq 0$ . Аналогічно:



**котангенсом кута  $\alpha$**  називають відношення косинуса цього кута до його синуса.

Справді,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , де  $\sin \alpha \neq 0$ .

Вирази  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$  мають зміст для будь-якого значення  $\alpha$ . Вираз  $\operatorname{tg} \alpha$  має зміст, коли  $x \neq 0$ , тобто коли  $\alpha \neq \pm 90^\circ, \pm 270^\circ$ ,

$\pm 450^\circ$ , ... , оскільки для цих кутів абсциса відповідної точки одиничного кола дорівнює нулю. Вираз  $\operatorname{ctg} \alpha$  має зміст, коли  $y \neq 0$ , тобто коли  $\alpha \neq 0^\circ, \pm 180^\circ, \pm 360^\circ$ , ... , оскільки для цих кутів ордината відповідної точки одиничного кола дорівнює нулю.

Отже, кожному допустимому значенню кута  $\alpha$  відповідає єдине значення  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ . Тому синус, косинус, тангенс і котангенс є функціями кута  $\alpha$ . Їх називають *тригонометричними функціями кута*.

#### 4. Тригонометричні значення деяких кутів

Знайдемо значення тригонометричних функцій кутів  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  за означенням.

На одиничному колі (мал. 17.11) позначимо точки  $P_\alpha$  для  $\alpha = 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ$ . Матимемо:

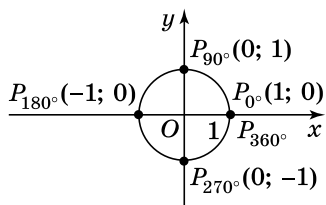
$P_{0^\circ}(1; 0)$ , тому  $\sin 0^\circ = 0$ ;  $\cos 0^\circ = 1$ ;  $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ ;  $\operatorname{ctg} 0^\circ$  – не існує.

$P_{90^\circ}(0; 1)$ , тому  $\sin 90^\circ = 1$ ;  $\cos 90^\circ = 0$ ;  $\operatorname{tg} 90^\circ$  – не існує;  $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$ .

$P_{180^\circ}(-1; 0)$ , тому  $\sin 180^\circ = 0$ ;  $\cos 180^\circ = -1$ ;  $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$ ;  $\operatorname{ctg} 180^\circ$  – не існує.

$P_{270^\circ}(0; -1)$ , тому  $\sin 270^\circ = -1$ ;  $\cos 270^\circ = 0$ ;  $\operatorname{tg} 270^\circ$  – не існує;  $\operatorname{ctg} 270^\circ = 0$ .

Точка  $P_{360^\circ}$  має ті самі координати, що й точка  $P_{0^\circ}$ , тому  $\sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0$ ;  $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1$ ;  $\operatorname{tg} 360^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$ ;  $\operatorname{ctg} 360^\circ$  – не існує.



Мал. 17.11

Подано отримані значення у вигляді таблиці, доповнивши її значеннями синуса, косинуса і тангенса гострих і тупих кутів, відомих нам з курсу геометрії. Невідомі значення тангенса і котангенса для цієї таблиці обчислимо відповідно за формулами

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Кути  $\alpha$ , зазначені у першому рядку цієї таблиці, ще називають *табличними кутами*. Маємо:

| $\alpha$                    | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ | $120^\circ$           | $135^\circ$           | $150^\circ$           | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|-----------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|-------------|-------------|
| $\sin \alpha$               | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0           | -1          | 0           |
| $\cos \alpha$               | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1          | 0           | 1           |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -          | $-\sqrt{3}$           | -1                    | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0           | -           | 0           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | -         | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0          | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1                    | $-\sqrt{3}$           | -           | 0           | -           |

**Приклад 3.** Обчислити:

1)  $\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$ ; 2)  $\sin^2 30^\circ + \operatorname{ctg} 135^\circ$ ;

3)  $(3\cos^2 90^\circ + 2\sin 270^\circ - 5\sqrt{3}\operatorname{tg} 120^\circ)^{-1}$ ;

4)  $\sqrt{(1 - 2\cos 30^\circ)^2} - \sqrt{(1 + \operatorname{ctg} 30^\circ)^2}$ .

Розв'язання. 1)  $\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{2} + 1 = 1,5$ .

2) Запис  $\sin^2 30^\circ$  означає  $(\sin 30^\circ)^2$ . Маємо:

$$\sin^2 30^\circ + \operatorname{ctg} 135^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1) = -\frac{3}{4}.$$

3)  $(3\cos^2 90^\circ + 2\sin 270^\circ - 5\sqrt{3}\operatorname{tg} 120^\circ)^{-1} =$

$$= (3 \cdot 0^2 + 2(-1) - 5\sqrt{3}(-\sqrt{3}))^{-1} = (-2 + 15)^{-1} = 13^{-1} = \frac{1}{13}.$$

4)  $\sqrt{(1 - 2\cos 30^\circ)^2} - \sqrt{(1 + \operatorname{ctg} 30^\circ)^2} =$

$$\left|1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right| - |1 + \sqrt{3}| = |1 - \sqrt{3}| - |1 + \sqrt{3}|.$$

Оскільки  $1 - \sqrt{3} < 0$ , то  $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ ;

$$1 + \sqrt{3} > 0, \text{ тому } |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3}.$$

Отже,  $|1 - \sqrt{3}| - |1 + \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1 - (1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1 - 1 - \sqrt{3} = -2$ .

Відповідь: 1) 1,5; 2)  $-\frac{3}{4}$ ; 3)  $\frac{1}{13}$ ; 4) -2.

**5. Знаходження тригонометричних функцій за допомогою калькулятора**

Для знаходження синуса, косинуса і тангенса в калькуляторах є відповідні клавіші  $\boxed{\sin}$ ,  $\boxed{\cos}$  і  $\boxed{\operatorname{tg}}$  (у деяких калькуляторах  $\boxed{\tan}$ ). Спочатку перемикач «Г-Р» треба зафіксувати у положенні «Г» для задання кутів у градусах. У деяких калькуляторах це досягається за допомогою клавіші  $\boxed{\text{MODE}}$  і вибору відповідного режиму. Залежно від типу калькулятора порядок обчислень може бути різним, тому радимо уважно ознайомитися з інструкцією до калькулятора. Наведемо порядок обчислень для двох найбільш поширених типів калькуляторів (с. 170).

В останніх рядках обох таблиць скористалися тим, що ко-тангенс є числом, оберненим до тангенса. Справді,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

| Умова                         | Послідовність дій<br>для калькуляторів I типу                                                                                                                                                                                 | Результат<br>(з точністю<br>до десяти-<br>тисячних) |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\sin 28^\circ$               | <input type="text" value="28"/> <input type="text" value="sin"/>                                                                                                                                                              | $\approx 0,4695$                                    |
| $\cos 12^\circ 20'$           | <input type="text" value="20"/> <input type="text" value="÷"/> <input type="text" value="60"/> <input type="text" value="+"/> <input type="text" value="12"/> <input type="text" value="="/> <input type="text" value="cos"/> | $\approx 0,9769$                                    |
| $\operatorname{tg} 17^\circ$  | <input type="text" value="17"/> <input type="text" value="tg"/>                                                                                                                                                               | $\approx 0,3057$                                    |
| $\operatorname{ctg} 54^\circ$ | <input type="text" value="54"/> <input type="text" value="tg"/> <input type="text" value="1/x"/>                                                                                                                              | $\approx 0,7265$                                    |

| Умова                         | Послідовність дій<br>для калькуляторів II типу                                                                                                                                                              | Результат<br>(з точністю<br>до десяти-<br>тисячних) |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\sin 28^\circ$               | <input type="text" value="sin"/> <input type="text" value="28"/> <input type="text" value="="/>                                                                                                             | $\approx 0,4695$                                    |
| $\cos 12^\circ 20'$           | <input type="text" value="cos"/> <input type="text" value="12"/> <input "="" type="text" value="°, "/> <input type="text" value="20"/> <input "="" type="text" value="°, "/> <input type="text" value="="/> | $\approx 0,9769$                                    |
| $\operatorname{tg} 17^\circ$  | <input type="text" value="tg"/> <input type="text" value="17"/> <input type="text" value="="/>                                                                                                              | $\approx 0,3057$                                    |
| $\operatorname{ctg} 54^\circ$ | <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="÷"/> <input type="text" value="tg"/> <input type="text" value="54"/> <input type="text" value="="/>                                                | $\approx 0,7265$                                    |

### А ще раніше...

Термін «тригонометрія» походить від грецьких слів «тригоном» – трикутник і «метрію» – вимірюю, що разом означає вимірювання трикутників.

Потреба у вимірюванні відстаней і кутів виникла ще у стародавні часи через необхідність визначення положення зірок на небі, кораблів у відкритому морі, караванів у пустелі тощо.

Деякі знання з тригонометрії накопили і вчені Стародавнього Вавилону. Засновниками ж тригонометрії прийнято вважати давньогрецьких вчених Гіпарха (бл. 180 р. – бл. 125 р. до н. е.) і Птолемея (бл. 100 р. – бл. 178 р.). Зокрема, Гіпарх склав таблиці хорд – перші тригонометричні таблиці. Більш точні таблиці синусів склав Птолемей. Крім цих таблиць, його праця «Альмагест» містила також тогочасні відомості з астрономії та суміжних наук.

У Європі вперше тригонометрія як самостійна наука трактується у праці «П'ять книг про трикутник усіх видів» Йоганна Мюллера (1436–1476). Подальший розвиток тригонометрії відбувся завдяки Миколаю Копернику (1473–1543), Франсуа Вієту (1540–1603), Йоганну Кеплеру (1571–1630) і був пов'язаний з дослідженнями в астрономії.

Сучасного вигляду тригонометрія набула у працях Леонарда Ейлера (1707–1783), який уперше сформулював означення тригонометричних функцій, розглянув їх для довільних кутів та довів кілька тригонометричних формул.

Термін «синус» уперше з'явився у працях індійського вченого Аріабхатти (476–550). Термін «косинус» є скороченням латинського «complementy sinus», тобто додатковий синус.

Сучасні позначення « $\sin x$ » і « $\cos x$ » уперше запропонував Йоганн Бернуллі в 1739 р. в листі до Леонарда Ейлера. Ейлер їх прийняв і систематизував.

Терміни «тангенс» і «котангенс» уведено арабським математиком Абу-н-Вефа (940–998). Він же склав перші таблиці тангенсів і котангенсів.



● Що називають початковим радіусом; кутом повороту? ● Який кут повороту вважають додатним, а який – від'ємним? ● Сформулюйте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута  $\alpha$ . ● Яке коло називають одиничним? ● Сформулюйте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута  $\alpha$ , заданого на одиничному колі.



## Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



**17.1.** Чому дорівнюють  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$ , якщо куту  $\alpha$  на одиничному колі відповідає точка  $P_\alpha\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ?

**17.2.** Чому дорівнюють  $\sin \beta$  і  $\cos \beta$ , якщо куту  $\beta$  на одиничному колі відповідає точка  $P_\beta(0,8; 0,6)$ ?

Знайдіть (17.3–17.4):

**17.3.** 1)  $\sin 45^\circ$ ; 2)  $\cos 90^\circ$ ; 3)  $\operatorname{tg} 30^\circ$ ; 4)  $\operatorname{ctg} 135^\circ$ ;  
5)  $\cos 120^\circ$ ; 6)  $\sin 180^\circ$ ; 7)  $\operatorname{ctg} 60^\circ$ ; 8)  $\operatorname{tg} 0^\circ$ .

**17.4.** 1)  $\sin 120^\circ$ ; 2)  $\cos 30^\circ$ ; 3)  $\operatorname{tg} 45^\circ$ ; 4)  $\operatorname{ctg} 90^\circ$ ;  
5)  $\cos 270^\circ$ ; 6)  $\sin 0^\circ$ ; 7)  $\operatorname{ctg} 120^\circ$ ; 8)  $\operatorname{tg} 60^\circ$ .

Накресліть коло із центром у початку координат і, використовуючи транспортир, позначте кут повороту, що дорівнює (17.5–17.6):

**17.5.** 1)  $60^\circ$ ; 2)  $210^\circ$ ; 3)  $-40^\circ$ ; 4)  $-320^\circ$ .

**17.6.** 1)  $110^\circ$ ; 2)  $300^\circ$ ; 3)  $-130^\circ$ ; 4)  $-200^\circ$ .



**2** Запишіть кут  $\alpha$  у вигляді  $\alpha = \alpha_0 + 360^\circ k$ , де  $0^\circ \leq \alpha_0 < 360^\circ$ , а  $k$  – деяке ціле число (17.7–17.8):

**17.7.** 1)  $\alpha = 420^\circ$ ; 2)  $\alpha = 765^\circ$ ; 3)  $\alpha = -320^\circ$ ; 4)  $\alpha = -1060^\circ$ .

**17.8.** 1)  $\alpha = 730^\circ$ ; 2)  $\alpha = 395^\circ$ ; 3)  $\alpha = -710^\circ$ ; 4)  $\alpha = -770^\circ$ .

**17.9.** Кутом якої чверті є кут  $\beta$ , якщо:

1)  $\beta = 190^\circ$ ; 2)  $\beta = -190^\circ$ ; 3)  $\beta = 105^\circ$ ; 4)  $\beta = -105^\circ$ ;  
5)  $\beta = 89^\circ$ ; 6)  $\beta = -89^\circ$ ; 7)  $\beta = 320^\circ$ ; 8)  $\beta = -320^\circ$ ?

**17.10.** Кутом якої чверті є кут  $\gamma$ , якщо:

- 1)  $\gamma = 95^\circ$ ;    2)  $\gamma = -95^\circ$ ;    3)  $\gamma = 210^\circ$ ;    4)  $\gamma = -210^\circ$ ;  
5)  $\gamma = 20^\circ$ ;    6)  $\gamma = -20^\circ$ ;    7)  $\gamma = 280^\circ$ ;    8)  $\gamma = -280^\circ$ ?

**17.11.** Відомо, що  $\sin \gamma = -\frac{12}{13}$ ;  $\cos \gamma = -\frac{5}{13}$ . Знайдіть  $\operatorname{tg} \gamma$  і  $\operatorname{ctg} \gamma$ .

**17.12.** Відомо, що  $\sin \beta = \frac{8}{17}$ ;  $\cos \beta = -\frac{15}{17}$ . Знайдіть  $\operatorname{tg} \beta$  і  $\operatorname{ctg} \beta$ .

Знайдіть за допомогою калькулятора (округліть до тисячних) (17.13–17.14):

**17.13.** 1)  $\sin(-15^\circ)$ ;    2)  $\cos 127^\circ$ ;    3)  $\operatorname{tg}(1000^\circ)$ ;    4)  $\operatorname{ctg}(-37^\circ)$ .

**17.14.** 1)  $\sin 190^\circ$ ;    2)  $\cos(-100^\circ)$ ;    3)  $\operatorname{tg}(-29^\circ)$ ;    4)  $\operatorname{ctg} 1200^\circ$ .

Знайдіть значення виразу (17.15–17.18):

**17.15.** 1)  $\cos 90^\circ + \sin 0^\circ$ ;    2)  $3\cos 180^\circ \cdot \sin 90^\circ$ ;  
3)  $2\operatorname{tg} 180^\circ - 4\operatorname{ctg} 90^\circ$ ;    4)  $\operatorname{ctg} 270^\circ - \cos 270^\circ + \sin 270^\circ$ .

**17.16.** 1)  $5\sin 360^\circ + \cos 360^\circ$ ;    2)  $\operatorname{tg} 0^\circ + \sin 180^\circ - \cos 0^\circ$ .

**17.17.** 1)  $4\cos 30^\circ - 2\sin 60^\circ$ ;    2)  $\sqrt{2} \sin 45^\circ + 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$ ;  
3)  $\operatorname{tg} 60^\circ : \operatorname{ctg} 30^\circ$ ;    4)  $\sin 150^\circ + \cos 120^\circ$ .

**17.18.** 1)  $\operatorname{ctg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$ ;    2)  $\sqrt{3} \sin 120^\circ - \cos 60^\circ$ ;  
3)  $\sin 135^\circ + \cos 135^\circ$ ;    4)  $\operatorname{tg} 120^\circ : \operatorname{ctg} 150^\circ$ .

Знайдіть за допомогою калькулятора (округліть до сотих) (17.19–17.20):

**17.19.** 1)  $\sin 12^\circ 37' + \cos 15^\circ 13'$ ;    2)  $\operatorname{tg} 105^\circ 12' + \operatorname{ctg} 185^\circ 38'$ .

**17.20.** 1)  $\cos 113^\circ 24' + \operatorname{tg} 17^\circ 36'$ ;    2)  $\sin 190^\circ 15' + \operatorname{ctg} 12^\circ 30'$ .

**3 17.21.** Серед кутів повороту  $520^\circ$ ;  $440^\circ$ ;  $-310^\circ$ ;  $220^\circ$ ;  $770^\circ$ ;  $-560^\circ$  знайдіть ті, у яких початковий радіус прийматиме те саме положення, що й при повороті на кут:

- 1)  $50^\circ$ ;    2)  $160^\circ$ .

**17.22.** Знайдіть у проміжку від  $0^\circ$  до  $360^\circ$  кут  $\beta$  такий, щоб поворот початкового радіуса на цей кут збігався з поворотом на кут  $\alpha$ , якщо:

- 1)  $\alpha = 480^\circ$ ;    2)  $\alpha = -70^\circ$ ;    3)  $\alpha = 1150^\circ$ ;    4)  $\alpha = -670^\circ$ .

**17.23.** Укажіть кут  $\alpha$ , що належить проміжку  $[360^\circ; 720^\circ]$ , для якого:

- 1)  $\sin \alpha = 1$ ;    2)  $\cos \alpha = 0$ ;    3)  $\sin \alpha = 0$ ;    4)  $\cos \alpha = -1$ .

**17.24.** Укажіть кут  $\beta$ , що належить проміжку  $[-360^\circ; 0^\circ]$ , для якого: 1)  $\sin \beta = -1$ ;    2)  $\cos \beta = 1$ .

**17.25.** Укажіть три таких значення  $x$ , для яких:

- 1)  $\sin x = \frac{1}{2}$ ;    2)  $\operatorname{tg} x = 0$ .

**17.26.** Укажіть два таких значення  $\alpha$ , для яких:

- 1)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;    2)  $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ .

Обчисліть (17.27–17.28):

17.27. 1)  $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$ ;      2)  $\sin 30^\circ \cos 180^\circ \operatorname{tg} 45^\circ$ ;  
3)  $\operatorname{tg}^2 180^\circ + \cos^2 120^\circ$ ;  
4)  $(2\operatorname{ctg} 270^\circ - 2\cos 60^\circ + \sin^2 60^\circ)^{-1}$ .

17.28. 1)  $\sin^2 120^\circ - \cos^2 0^\circ$ ;      2)  $\cos 45^\circ \sin 135^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ$ ;  
3)  $\operatorname{ctg}^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ$ ;  
4)  $(2\cos^2 0^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ - 10\cos^2 60^\circ)^{-1}$ .

17.29. Знайдіть значення виразу  $\sin 3\alpha + \sin 2\alpha$ , якщо:

1)  $\alpha = 15^\circ$ ;      2)  $\alpha = 30^\circ$ ;      3)  $\alpha = 60^\circ$ ;      4)  $\alpha = 90^\circ$ .

17.30. Знайдіть значення виразу  $\cos \alpha + \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$ , якщо:

1)  $\alpha = 30^\circ$ ;      2)  $\alpha = 60^\circ$ .

Які координати має точка одиничного кола, отримана при повороті точки  $P_0(1; 0)$  на кут (17.31–17.32):

17.31. 1)  $90^\circ$ ;      2)  $-180^\circ$ ;      3)  $135^\circ$ ;      4)  $-240^\circ$ ?

17.32. 1)  $30^\circ$ ;      2)  $-270^\circ$ ;      3)  $150^\circ$ ;      4)  $-300^\circ$ ?

17.33. Точка одиничного кола має абсцису, що дорівнює чис-

лу  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Яка ордината у цієї точки?

17.34. Точка одиничного кола має ординату, що дорівнює

числу  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Яка абсциса у цієї точки?

**4** Обчисліть (17.35–17.36):

17.35. 1)  $\sqrt{(1 - 2\cos 45^\circ)^2} - \sqrt{(1 + 2\sin 45^\circ)^2}$ ;  
2)  $\sqrt{(\operatorname{ctg} 30^\circ - 2)^2} + \sqrt{(\operatorname{tg} 60^\circ - 1)^2}$ .

17.36. 1)  $\sqrt{(1 - 2\sin 60^\circ)^2} - \sqrt{(1 + 2\cos 30^\circ)^2}$ ;  
2)  $\sqrt{(3\operatorname{tg} 30^\circ - 1)^2} + \sqrt{(3\operatorname{ctg} 60^\circ - 2)^2}$ .

17.37. Точка  $P_\alpha$  одиничного кола має координати  $(a; b)$ . Знайдіть координати точок  $P_{-\alpha}$  і  $P_{\alpha+180^\circ}$ .

Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих при повороті точки  $P_0(1; 0)$  на кут (17.38–17.39):

17.38. 1)  $60^\circ + 360^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;      2)  $180^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  
3)  $135^\circ + 720^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;      4)  $-90^\circ + 180^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

17.39. 1)  $120^\circ + 360^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;      2)  $90^\circ + 180^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  
3)  $720^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;      4)  $30^\circ + 1080^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



17.40. Для табору пластунів потрібно придбати цукор з розрахунку добової норми у 50 г цукру на одну особу. У таборі 4 курені на 28 місць кожен. Скільки кілограмових упаковок цукру знадобиться на 5 днів для всього табору?



17.41. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{2x-3}$ .



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

**17.42.** Радіус кола дорівнює 1 дм. Знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному куту:

- |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $30^\circ$ ;   | 2) $45^\circ$ ;   | 3) $60^\circ$ ;   |
| 4) $90^\circ$ ;   | 5) $120^\circ$ ;  | 6) $135^\circ$ ;  |
| 7) $150^\circ$ ;  | 8) $180^\circ$ ;  | 9) $210^\circ$ ;  |
| 10) $235^\circ$ ; | 11) $240^\circ$ ; | 12) $270^\circ$ . |

## § 18. РАДІАННЕ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ

Як відомо, кути вимірюють у градусах і його частинах – мінутах, секундах. Проте в математиці, астрономії, фізиці та інших науках використовують ще й *радіанну міру* кута, яка має певні переваги порівняно з градусною.

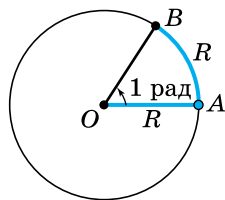
### 1. Радіанна міра кута



**Кутом в 1 (один) радіан називають центральний кут, довжина дуги якого дорівнює довжині радіуса кола.**

На малюнку 18.1  $\widehat{AB} = R$ , тому міра кута  $AOB$  дорівнює 1 радіан (скорочено «рад»).

Знайдемо зв'язок між радіанною і градусною мірами. Довжина півкола, радіус якого  $R$ , дорівнює  $\pi R$ , що в  $\pi$  разів більше за довжину дуги  $AB$ . Тому розгорнутому куту відповідає дуга міри  $\pi$  радіанів. Отже,



Мал. 18.1



$$180^\circ = \pi \text{ рад.}$$

Звідси маємо, що  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  рад, тоді  $n^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot n$  рад;

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}, \text{ тоді } \alpha \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha.$$

Корисно пам'ятати, що  $1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 18'.$

Одержані формули, зокрема, використовують для переходу від градусної міри кута до радіанної і навпаки, проте для цього можемо застосовувати і пропорцію, врахувавши, що  $180^\circ = \pi$  рад.

**Приклад 1.** Знайти радіанну міру кута  $144^\circ$ .

• Розв'язання. *І спосіб* (за формулою).