

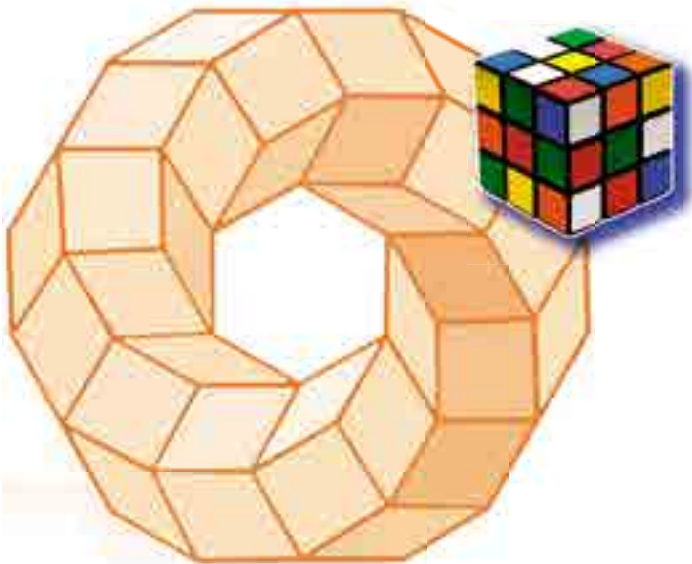
Олександр Істер
Оксана Єргіна

ГЕОМЕТРІЯ

(ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*



КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2019

УДК 514(075.3)

I-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Істер О.С.

I-89 Геометрія : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл.
закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргі-
на. — Київ : Генеза, 2019. — 288 с. : іл.

ISBN 978-966-11-0974-1.

УДК 514(075.3)

ISBN 978-966-11-0974-1

© Істер О.С., Єргіна О.В., 2019
© Видавництво «Генеза», ори-
гінал-макет, 2019

Шановні одинадцятикласниці та одинадцятикласники!

В 11 класі ви завершуєте вивчення шкільного курсу стереометрії.

Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам оволодіти такою системою знань з геометрії та набути таких компетентностей, які знадобляться не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності і які дадуть змогу продовжити навчання у вищих навчальних закладах.

Для зручності користування підручником його матеріал поділено на розділи, параграфи, рубрики. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої робіт та практичної діяльності тощо.

Вивчення стереометрії потребує логічного мислення, просторової уяви та наполегливості. Теоретичний матеріал підручника авторський колектив намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами з повсякденного життя.

У підручнику використовуються такі умовні позначки:



– треба запам'ятати;



– запитання до параграфів;



– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);



– теорема;



– наслідок з теореми;



– доведення закінчено;

1.24 – вправа для виконання у класі;

1.25 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі та вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки починаються вправи початкового рівня;

з позначки починаються вправи середнього рівня;

з позначки починаються вправи достатнього рівня;

з позначки починаються вправи високого рівня.

Рубрика **«Розв'яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної та домашньої робіт, усних вправ, завдань для проектної і практичної діяльності, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. Рубрика **«Задачі підвищеної складності»** містить завдання для поглиблення знань з геометрії та підготовки до різноманітних математичних змагань. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується розв'язати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми.

У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю та підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською

відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в повсякденному житті. Рубрика  «Цікаві задачі для учнів неледачих» містить задачі, які зазвичай називають нестандартними, задачі математичних олімпіад різних країн світу, задачі, які сформулювали видатні математики, тощо. Наприкінці кожного параграфа в рубриці «Перевірте свою компетентність» ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити шкільний курс геометрії, перевірити рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, виконавши завдання «**Домашньої самостійної роботи**» та «**Завдання для перевірки знань**».

У кінці кожного розділу наведено вправи для його повторення.

Підручник містить багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку геометрії, життєвого шляху українських математиків, що долучилися до створення шкільного курсу геометрії та олімпіадного руху.

Успіхів вам на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів геометрії. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість. Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну і практичну складові, підручник містить рубрику «Життєва математика», що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та формуватиме в учнів предметні та ключові компетентності. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик «Цікаві задачі для учнів неледачих» і «Задачі підвищеної складності» допоможуть забезпечити особистісно-орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення геометрії.

У підручник включено велику кількість задач і вправ, завдання для проектної та практичної діяльності, а в кінці кожного розділу розміщено додаткові вправи для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу розділу.

Успіхів вам у вашій нелегкій праці!

МНОГОГРАННИКИ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

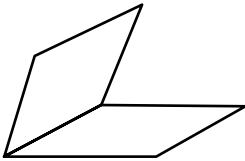
- *пригадаєте*, що таке прямокутний паралелепіпед, піраміда та їхні елементи; як будувати перерізи цих фігур;
- *дізнаєтеся*, що таке призма та її елементи;
- *познайомитеся* з поняттям правильного многогранника та видами правильних многогранників;
- *навчитесь* зображувати призму, паралелепіпед, піраміду; обчислювати їхні елементи; знаходити площі поверхонь многогранників.

§ 1. ДВОГРАННІ ТА МНОГОГРАННІ КУТИ. МНОГОГРАННИК. ПРИЗМА

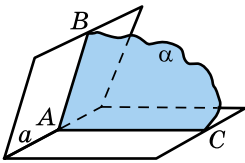
У цьому параграфі пригадаємо вже відоме нам з 10 класу поняття *двогранного кута* та розглянемо *многогранний кут*.

1. Двогранні та многогранні кути

! *Двогранним кутом* називають фігуру, яка утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.



Мал. 1.1



Мал. 1.2

На малюнку 1.1 зображено двогранний кут. Півплощини, що утворюють двогранний кут, називають *гранями*, а пряму, що їх обмежує, – *ребром двогранного кута*.

У повсякденному житті нам часто трапляються предмети, що мають форму двогранного кута. Прикладами таких предметів є відкритий або частково відкритий ноутбук, дві суміжні стіни кімнати, двоскатний дах будівлі тощо.

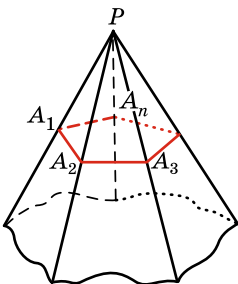
Площина α , що перпендикулярна до ребра a двогранного кута, перетинає грані двогранного кута по променях AB і AC (мал. 1.2). Кут BAC називають *лінійним кутом двогранного кута*. Двогранний кут має безліч лінійних кутів. Оскільки всі вони суміщаються паралельним перенесенням, то є рівними між собою.



Градусною мірою двогранного кута називають градусну міру його лінійного кута.

Зазвичай, замість «градусна міра двогранного кута дорівнює...» кажуть «двогранний кут дорівнює...».

У геометрії розглядають також і *многогранні кути*.



Мал. 1.3



Нехай $A_1A_2\dots A_n$ – довільний плоский многокутник, а точка P не належить площині цього многокутника. **Многогранним (n -гранним) кутом** називають множину всіх променів з початком у точці P , що перетинають даний многокутник (мал. 1.3).

Точку P називають *вершиною*, промені PA_1, PA_2, \dots, PA_n – *ребрами*, а плоскі кути $A_1PA_2, A_2PA_3, \dots, A_nPA_1$ – *гранями многогранного кута*.

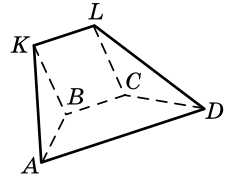
2. Многогранники

У попередніх класах ми вже розглядали прямокутні паралелепіпеди, куби й піраміди. Усі вказані тіла є прикладами многогранників.



Многогранником називають тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників.

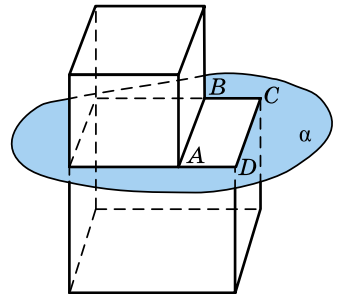
На малюнку 1.4 зображено многогранник, поверхня якого складається з трапеції $ABCD$ і $AKLD$, трикутників ABK і CLD та паралелограма $BKLC$. Многокутники, які обмежують многогранник, називають *гранями*, сторони цих многокутників – *ребрами*, а кінці ребер – *вершинами многогранника*. Гранями многогранника, зображеного на малюнку 1.4, є многокутники $ABCD$, $AKLD$, ABK , CLD , $BKLC$, ребрами – відрізки AB , BC , CD , DA , BK , CL , AK , KL і LD , вершинами – точки A , B , C , D , K і L .



Мал. 1.4

Многогранники бувають *опуклі* і *неопуклі*. Многогранник називають опуклим, якщо він лежить по один бік від площини кожної з його граней. На малюнку 1.4 зображено опуклий многогранник. Зауважимо, що всі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками.

На малюнку 1.5 зображено неопуклий многогранник, оскільки площина α , якій належить грань $ABCD$ цього многогранника, розбиває многогранник на дві частини.

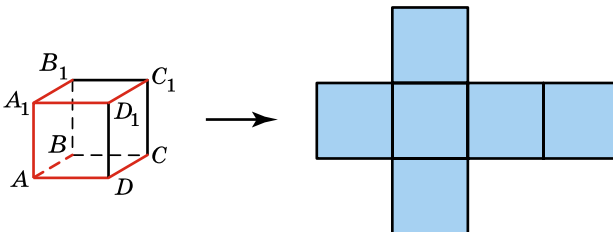


Мал. 1.5

Усі многогранники, які ми розглядали раніше, є опуклими.

Якщо поверхню многогранника розрізати по деяких його ребрах і розгорнути в площину однієї з його граней, то отримаємо *розгортку* даного многогранника.

Наприклад, якщо куб розрізати по ребрах AB , CD , A_1B_1 , C_1D_1 , AD , AA_1 , A_1D_1 (мал. 1.6), то отримаємо його розгортку.



Мал. 1.6

Площа поверхні многогранника – це сума площ усіх його граней. Площа поверхні многогранника дорівнює площі його розгортки.

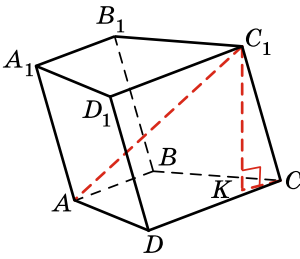
У шкільному курсі геометрії розглядатимемо найпростіші многогранники: призми і піраміди.

3. Призма

Одним з найпростіших многогранників є *призма*. З деякими видами призм (прямокутним паралелепіпедом і кубом) ви ознайомилися ще в початковій школі. Призмою також є кузов вантажівки, шестигранний олівець, коробка з-під офісного паперу тощо.



Призмою називають многогранник, у якого дві грані між собою рівні і лежать у паралельних площинах (їх називають *основами призми*), а всі інші грані – паралелограми (їх називають *бічними гранями призми*).



Мал. 1.7

На малюнку 1.7 зображено призму, основами якої є чотирикутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Призму прийнято називати за назвою її основ, наприклад, на малюнку 1.7 зображено призму $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Сторони бічних граней призми, які не належать основам, називають *бічними ребрами призми*.

На малюнку 1.7 паралелограми AA_1D_1D , ABB_1A_1 , BB_1C_1C і CC_1D_1D – бічні грані призми; AA_1 , BB_1 , CC_1 і

DD_1 – бічні ребра призми. Зрозуміло, що *всі бічні ребра призми паралельні і рівні між собою*.



Призму називають *n*-кутною, якщо її основою є *n*-кутник.

На малюнку 1.7 зображено чотирикутну призму.



Перпендикуляр, проведений з деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають *висотою призми*.

На малюнку 1.7 відрізок C_1K – висота призми.



Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не лежать в одній грані, називають *діагоналлю призми*.

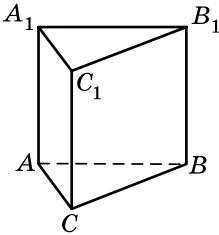
На малюнку 1.7 відрізок C_1A – діагональ призми.

Зауважимо, що під поняттям діагоналі, як і під поняттям відрізка, матимемо на увазі як відрізок, що є діагоналлю, так

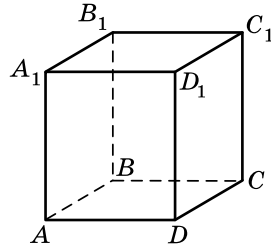
і довжину цього відрізка. Тому замість «довжина діагоналі дорівнює 4 см» будемо казати «діагональ дорівнює 4 см». Так само використовують і поняття висоти, бічного ребра, сторони основи тощо, оскільки всі вони є відрізками.



Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до її основ, в іншому випадку призму називають похилою.



Мал. 1.8



Мал. 1.9

На малюнку 1.7 зображено похилу чотирикутну призму, а на малюнку 1.8 – пряму трикутну призму. Зрозуміло, що бічні грані прямої призми – прямокутники, а висота прямої призми дорівнює її бічному ребру.



Пряму призму називають правильною, якщо її основою є правильний многокутник.

На малюнку 1.9 зображено правильну чотирикутну призму. У правильній призмі всі бічні грані – рівні прямокутники.



Площею повної поверхні призми називають суму площ усіх її граней, а площею бічної поверхні призми – суму площ її бічних граней.

Площу повної поверхні призми $S_{\text{повн}}$ можна записати через площі її бічної поверхні $S_{\text{біч}}$ і її основи $S_{\text{осн}}$ формулою:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}.$$



Теорема (про площу бічної поверхні прямої призми). Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи P на висоту призми, тобто на довжину її бічного ребра l :

$$S_{\text{біч}} = Pl.$$

Доведення. Нехай a_1, a_2, \dots, a_n – сторони основи, а l – довжина бічного ребра прямої призми. Враховуючи, що всі бічні грані – прямокутники, одна сторона яких дорівнює від-

повідно a_1, a_2, \dots, a_n , а друга – є однаковою для всіх і дорівнює l , маємо:

$$S_{\text{біч}} = a_1 l + a_2 l + \dots + a_n l = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) l = Pl,$$

оскільки $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – периметр основи. ■

Задача 1. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Висота призми дорівнює 12 см. Знайдіть діагональ тієї грані призми, яка містить гіпотенузу трикутника.

Розв’язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана призма (мал. 1.10), $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle ACB = 90^\circ$, $BB_1 = 12$ см.

Знайдемо довжину діагоналі AB_1 .

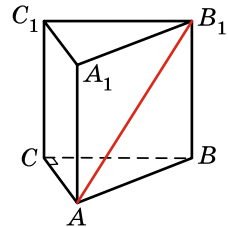
1) Із $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$):

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см);}$$

2) Із $\triangle ABB_1$ ($\angle B = 90^\circ$):

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (см).}$$

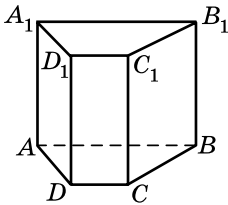
Відповідь. 13 см.



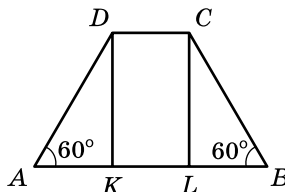
Мал. 1.10

Задача 2. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, більша основа якої дорівнює 11 см, бічна сторона – 6 см, а кут при основі – 60° . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює меншій основі трапеції.

Розв’язання. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – дана призма (мал. 1.11), $AB = 11$ см, $AD = BC = 6$ см, $\angle A = 60^\circ$. Знайдемо бічну поверхню призми: $S_{\text{біч}} = Pl = (AB + DC + 2BC) \cdot BB_1$.



Мал. 1.11



Мал. 1.12

1) Розглянемо трапецію $ABCD$, що є основою призми (мал. 1.12), проведемо в ній висоти DK і CL . Оскільки $AD = BC$, то $\angle A = \angle B = 60^\circ$ і $AK = BL$.

2) Із $\triangle ADK$ ($\angle K = 90^\circ$): $\cos A = \frac{AK}{AD}$, тоді $AK = AD \cos A = 6 \cos 60^\circ = 3$ (см). Оскільки $BL = AK$, то $BL = 3$ см.

3) Оскільки $KDCL$ – прямокутник, то $DC = KL = AB - 2AK = 11 - 2 \cdot 3 = 5$ (см).

- 4) За умовою $BB_1 = DC$, тому $BB_1 = 5$ см.
- 5) $S_{\text{біч}} = (AB + DC + 2BC) \cdot BB_1 = (11 + 5 + 2 \cdot 6) \cdot 5 =$
 $= 140$ (см²).
- Відповідь. 140 см².

Задача 3. Бічне ребро похилої призми дорівнює 16 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть висоту призми. Розв'язання. У цій задачі не має значення, який саме многокутник є основою призми, тому використаємо малюнок 1.7. Тоді за умовою $CC_1 = 16$ см, C_1K – висота призми, кут нахилу ребра CC_1 до площини основи дорівнює 60° .

1) Оскільки $C_1K \perp (ABC)$, C_1C – похила до (ABC) , CK – її проєкція, то $\angle C_1CK$ – кут нахилу бічного ребра до площини основи, отже, $\angle C_1CK = 60^\circ$.

2) Із $\triangle CC_1K$ ($\angle K = 90^\circ$): $\sin C = \frac{C_1K}{CC_1}$, тоді

$$C_1K = CC_1 \cdot \sin C = CC_1 \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Відповідь. $8\sqrt{3}$ см.

4. Поняття перерізу многогранника

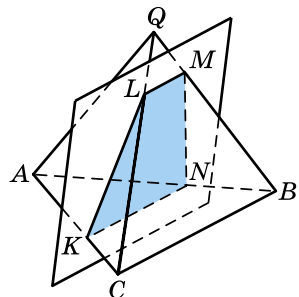
Умови багатьох геометричних задач використовують поняття перерізу многогранника. Тож для розв'язування таких задач треба навчитися будувати *переріз многогранника* площиною. У 10 класі ми вже дізналися, як побудувати перерізи деяких многогранників, зокрема прямокутного паралелепіпеда і піраміди.

Нагадаємо, що *січною площиною многогранника* називають будь-яку площину, по обидва боки якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинає грані многогранника по відрізках. Многокутник, сторонами якого є ці відрізки, називають *перерізом многогранника*.

Наприклад, на малюнку 1.13 чотирикутник $KLMN$ є перерізом трикутної піраміди $QABC$.

Зауважимо, що січна площина може бути задана одним із відомих нам способів: трьома точками, що не лежать на одній прямій, або прямою і точкою, що їй не належить, або двома прямими, що перетинаються.

Нагадаємо, що для побудови перерізів можна використовувати метод



Мал. 1.13

слідів або метод внутрішнього проєкціювання, а також використовувати властивості паралельних прямих і площин.

Далі розглянемо деякі перерізи призми.

5. Побудова перерізу призми

Діагональним перерізом призми.

На малюнку 1.14 чотирикутник AA_1C_1C – діагональний переріз прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Цей переріз є прямокутником, одна зі сторін якого – діагональ основи AC , а інша – бічне ребро AA_1 . У похилій призмі діагональним перерізом є паралелограм.

У задачах, пов'язаних із перерізом многогранника, може ставитися вимога знайти певні властивості цього перерізу, його площу або периметр тощо.

Задача 4. Основою прямої призми є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60° . Бічне ребро призми дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу діагонального перерізу призми, одна зі сторін якого є більшою діагоналлю ромба.

Розв'язання. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пряма призма (мал. 1.14), $CC_1 = \sqrt{3}$ см, $ABCD$ – ромб, $AB = 8$ см, $\angle A = 60^\circ$, тому AC – більша діагональ ромба. Тоді $AA_1 C_1 C$ – діагональний переріз, площу якого треба знайти. Оскільки $AA_1 C_1 C$ – прямокутник, то $S_{AA_1 C_1 C} = AC \cdot CC_1 = AC \sqrt{3}$ (см²). Знайдемо AC .

1) У ромбі $ABCD$:

$$\angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

2) Із $\triangle ADC$ за теоремою косинусів:

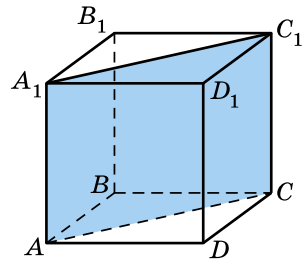
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos D = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cos 120^\circ = 3 \cdot 8^2,$$

$$\text{тоді } AC = 8\sqrt{3} \text{ (см).}$$

3) Маємо:

$$S_{AA_1 C_1 C} = AC \sqrt{3} = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 24 см^2 .



Мал. 1.14

Часто в задачах розглядають перерізи призми, що проходять через сторону основи призми і перетинають бічні ребра призми.

Задача 5. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см. Через сторону основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут 30° і перетинає бічне ребро в його середині. Знайдіть площу повної поверхні призми.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана правильна призма з основою ABC (мал. 1.15), $AB = 4$ см. Запишемо формулу для знаходження площі повної поверхні даної призми:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}} = Pl + 2S_{ABC} = \\ = 3AB \cdot CC_1 + 2 \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 12 \cdot CC_1 + 8\sqrt{3}.$$

Отже, залишається знайти CC_1 .

1) Побудуємо переріз. Нехай точка K – середина ребра CC_1 . Через пряму AB і точку K проведемо площину. Перерізом призми є $\triangle ABK$.

2) У трикутнику ABC проведемо висоту і медіану CM , тоді

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

3) Проведемо відрізок KM . Оскільки $CC_1 \perp (ABC)$, CM – проекція похилої KM на (ABC) , $CM \perp AB$, то $KM \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри). Тоді $\angle KMC$ – кут, що утворює переріз із площиною основи. За умовою $\angle KMC = 30^\circ$.

4) Із $\triangle KMC$ ($\angle C = 90^\circ$): $\text{tg} M = \frac{KC}{CM}$. Тоді

$$KC = CM \cdot \text{tg} M = 2\sqrt{3} \text{tg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 \text{ (см)}.$$

5) Оскільки K – середина CC_1 , то $CC_1 = 2KC = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

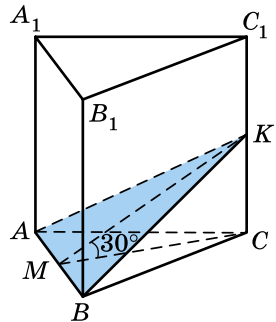
6) $S_{\text{повн}} = 12 \cdot CC_1 + 8\sqrt{3} = 12 \cdot 4 + 8\sqrt{3} = 48 + 8\sqrt{3}$.

Відповідь. $48 + 8\sqrt{3}$ см².

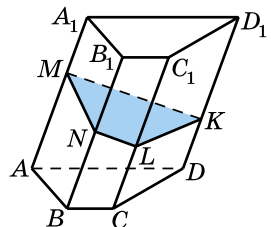
Розглянемо переріз похилої призми площиною, яка проходить через точку M бічного ребра AA_1 перпендикулярно до цього ребра та перетинає кожне з інших бічних ребер цієї призми (мал. 1.16).

Зрозуміло, що площина перерізу буде перпендикулярною до всіх інших бічних ребер призми. Такий переріз називають *перпендикулярним перерізом призми*. На малюнку 1.16 чотирикутник $MNLK$ – перпендикулярний переріз.

Перпендикулярний переріз прийнято розглядати лише в похилій призмі,



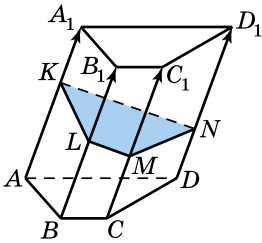
Мал. 1.15



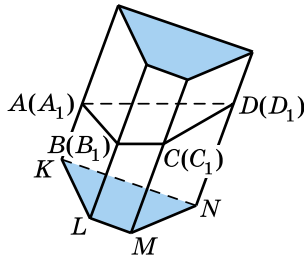
Мал. 1.16

оскільки, очевидно, що у прямій призмі він дорівнює многокутнику, що є основою призми.

- Задача 6.** Нехай у похилій призмі проведено перпендикулярний переріз. Довести, що бічну поверхню призми можна знайти за формулою $S_{\text{біч}} = P_{\text{пер}} \cdot l$, де $P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу призми, l – довжина бічного ребра (мал. 1.16).
- Доведення.** Розглянемо перпендикулярний переріз похилої призми $KLMN$ (мал. 1.16). Він ділить призму на дві частини. Застосуємо до нижньої частини призми паралельне перенесення на вектор AA_1 (мал. 1.17). Тоді основи $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ призми сумістяться, і ми отримаємо нову призму, основами якої буде перпендикулярний переріз призми (мал. 1.18), а бічні ребра дорівнюватимуть l .
- Очевидно, що отримана призма має таку саму площу бічної поверхні, як і початкова. Площа бічної поверхні отриманої призми дорівнює $P_{MNLK} \cdot l$, оскільки вона є прямою. Тому і бічна поверхня початкової призми теж дорівнює $P_{\text{пер}} \cdot l$, де $P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу, l – довжина бічного ребра. ■



Мал. 1.17



Мал. 1.18

А ще раніше...

Евклід означив призму як «геометричну фігуру, що міститься між двома рівними і паралельними площинами (основами), бічні грані якої – паралелограми».

Зазначимо, що Евклід використовував термін «площина» і у сенсі необмеженості її в усіх напрямках, і у сенсі кінцевої, обмеженої її частини, зокрема грані.

У XVIII ст. англійський математик Брук Тейлор (1685–1731) дав призмі таке означення: «це многогранник, у якого всі грані, крім двох, паралельні одній прямій».



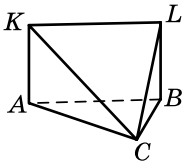
- Що називають двограним кутом? • Що називають гранями двогранного кута, ребром двогранного кута? • Що називають многогранним кутом? • Що називають вершиною многогранного кута, ребрами многогранного кута, гранями многогранного кута?
- Що називають многогранником? • Що називають гранями, ребрами, вершинами многогранника? • Який многогранник називають опуклим? • Як отримати розгортку многогранника? • Що називають призмою? • Що називають основами, бічними гранями та бічними ребрами призми? • Які властивості основ та бічних ребер призми вам відомі? • Яку призму називають n -кутною? • Що називають висотою призми? • Що таке діагональ призми? • Яку призму називають прямою, а яку – похилою? • Яку призму називають правильною? • Що розуміють під площею бічної поверхні призми; площею повної поверхні призми? • Сформулюйте та доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми. • Що розуміють під перерізом многогранника? • Який переріз призми називають діагональним?



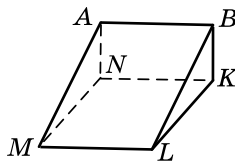
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



1.1. Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.19.



Мал. 1.19



Мал. 1.20

- 1.2.** Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.20.
- 1.3.** Скільки ребер і граней у чотирикутної призми?
- 1.4.** Скільки ребер і граней у п'ятикутної призми?
- 1.5.** Площа основи призми дорівнює 5 см^2 , а площа бічної поверхні – 12 см^2 . Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.6.** Площа бічної поверхні призми дорівнює 10 см^2 , а площа основи – 4 см^2 . Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.7.** Площа основи трикутної призми дорівнює 6 см^2 , а площі її бічних граней – 9 см^2 , 12 см^2 і 15 см^2 . Знайдіть площу повної поверхні призми.

- 1.8. Площа основи чотирикутної призми дорівнює 16 см^2 , а площа кожної з її бічних граней – 8 см^2 . Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.9. Основою прямої призми є чотирикутник, одна зі сторін якого дорівнює 4 см , кожна наступна на 1 см більша за попередню. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см .
- 1.10. Основою прямої призми є п'ятикутник, одна зі сторін якого дорівнює 20 см , а кожна наступна на 2 см менша за попередню. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см .
- 1.11. Основою прямої призми є квадрат зі стороною 3 см . Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см .
- 1.12. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 2 см і 5 см . Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см .
- 2 1.13. Яку найменшу кількість:
1) ребер може мати многогранник;
2) граней може мати многогранник?
- 1.14. Чи існує многогранник, у якого кількість вершин дорівнює кількості граней? У разі позитивної відповіді зобразіть його.
- 1.15. Визначте кількість вершин многокутника, що є основою призми, якщо ця призма має 11 граней.
- 1.16. Призма має 9 граней. Скільки сторін у многокутника, що є її основою?
- 1.17. Який многокутник є основою призми, якщо у призми 12 ребер?
- 1.18. Який многокутник є основою призми, якщо у призми 18 ребер?
- 1.19. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює 4 см , а діагональ бічної грані – 5 см . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.20. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 5 см .
- 1.21. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 6 см і 5 см . Знайдіть висоту призми, якщо площа її повної поверхні дорівнює 126 см^2 .

- 1.22. Площа повної поверхні правильної чотирикутної призми – 250 см^2 . Знайдіть висоту призми, якщо сторона її основи дорівнює 5 см .
- 1.23. Бічне ребро похилої призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть висоту призми.
- 1.24. Висота похилої призми дорівнює $2\sqrt{3} \text{ см}$. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 60° .
- 1.25. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 6 см , а бічне ребро – 3 см . Знайдіть площу діагонального перерізу цієї призми.
- 1.26. Знайдіть площу діагонального перерізу прямої чотирикутної призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см , а основою є прямокутник зі сторонами 8 см і 15 см .
- 1.27. Чи існує призма, у якої:
1) 99 ребер; 2) 101 ребро?
- 1.28. Чи існує призма, у якої:
1) 68 ребер; 2) 72 ребра?
- 1.29. Висота основи правильної трикутної призми дорівнює $4\sqrt{3} \text{ см}$, а висота призми – 5 см . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.30. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної призми, дорівнює $2\sqrt{3} \text{ см}$, а висота призми дорівнює 7 см . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.31. Радіус кола, описаного навколо основи правильної трикутної призми, дорівнює $6\sqrt{3} \text{ см}$, а діагональ бічної грані утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.32. Висота основи правильної трикутної призми дорівнює $9\sqrt{3} \text{ см}$, а діагональ бічної грані утворює кут 45° з висотою призми. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.33. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 4 см , 13 см і 15 см , а висота призми – 10 см . Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.34. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см , 29 см і 30 см , а висота призми – 4 см . Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.35. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює $\sqrt{3} \text{ см}$, а діагональ призми утворює з висотою кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

- 1.36.** Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а діагональ призми утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.37.** Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а діагональ призми дорівнює 9 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.38.** Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а діагональ призми дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.39.** Тумба для тварин, яку використовують дресировальники під час своїх виступів на арені цирку, має форму правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 60 см, а висота – 50 см. Треба пофарбувати бічну поверхню цієї тумби. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?
- 1.40.** Одним з елементів дитячого ігрового майданчика є правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 50 см, а висота – 40 см. Треба пофарбувати бічну поверхню цієї призми. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?
- 1.41.** У правильній чотирикутній призмі знайдіть відношення площі діагонального перерізу до площі бічної грані.
- 1.42.** Основою прямої призми є ромб із діагоналями 9 см і 6 см. Знайдіть відношення площ діагональних перерізів цієї призми.
- 3** **1.43.** Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 81 см^2 , а площа її бічної поверхні – 144 см^2 . Знайдіть діагональ призми.
- 1.44.** Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см^2 , а площа однієї з її бічних граней – 168 см^2 . Знайдіть діагональ призми.
- 1.45.** У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина AB . Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо відрізок C_1M утворює з площиною основи кут 60° і $C_1M = 6 \text{ см}$.
- 1.46.** У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка N – середина BC . Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо відрізок A_1N утворює з висотою призми кут 60° і $A_1N = 12 \text{ см}$.
- 1.47.** $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка O – центр основи ABC , AM – медіана трикутника ABC ,

$$\sin \angle MC_1O = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Знайдіть } \angle C_1OM.$$

- 1.48.** $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка O – центр основи ABC , AM – бісектриса трикутника ABC , $\angle C_1OM = 45^\circ$. Знайдіть $\cos \angle OC_1M$.
- 1.49.** Мале підприємство випускає подарункові коробки у вигляді прямої призми, основою якої є ромб із діагоналями 24 см і 10 см. Площа повної поверхні такої коробки дорівнює 760 см^2 . Знайдіть висоту коробки.
- 1.50.** Потрібно виготовити короб із кришкою для зберігання картоплі у формі прямої призми висотою 0,7 м. Основою коробка є рівнобічна трапеція з основами 0,4 м і 0,6 м і бічною стороною 0,5 м. Скільки фанери знадобиться для виготовлення такого коробка? Округліть відповідь до десятих м^2 .
- 1.51.** $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка K – середина AB , M – середина A_1B_1 . Відомо, що в чотирикутник CC_1MK можна вписати коло. Знайдіть кут C_1BC .
- 1.52.** $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка M – точка перетину медіан трикутника AC_1B_1 , $MK \perp (ABC)$, $MK = \frac{AB}{3}$. Знайдіть $\angle C_1BC$.
- 1.53.** $ABCA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма, $\angle DB_1C = 30^\circ$. Знайдіть $\angle B_1AB$.
- 1.54.** $ABCA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма, $\angle BDB_1 = 45^\circ$. Знайдіть $\angle C_1AC$.
- 1.55.** Перпендикулярним перерізом похилої трикутної призми є рівнобедрений трикутник з основою 8 см і площею 12 см^2 . Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює 144 см^2 .
- 1.56.** Перпендикулярним перерізом похилої трикутної призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і площею 12 см^2 . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо бічне ребро призми дорівнює 7 см.
- 1.57.** Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо периметри двох її граней дорівнюють 30 см і 24 см. Скільки випадків треба розглянути?
- 1.58.** Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо периметри двох її граней дорівнюють 24 см і 36 см. Скільки випадків треба розглянути?


- 1.59.** Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як $5 : 9 : 10$. Діагоналі двох менших її бічних граней дорівнюють 26 см і 30 см. Знайдіть периметр основи призми.
- 1.60.** Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як $8 : 9 : 16$. Діагоналі двох більших її бічних граней дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть периметр основи призми.
- 1.61.** Основа прямої призми – трикутник, дві сторони якого відносяться як $7 : 8$ та утворюють між собою кут 120° . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо площа більшої бічної грані призми дорівнює 52 см².
- 1.62.** Основою прямої призми є трикутник, дві сторони якого відносяться як $3\sqrt{2} : 1$ та утворюють між собою кут 135° . Площа більшої бічної грані призми дорівнює 30 см². Знайдіть висоту призми.
- 1.63.** $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ – правильна шестикутна призма. Знайдіть кут між прямими:
1) AC і $B_1 E_1$; 2) AD і $B_1 E_1$; 3) AD і $A_1 C_1$.
- 1.64.** $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ – правильна шестикутна призма. Знайдіть кут між прямими:
1) AA_1 і DE ; 2) AC і $B_1 D$.
- 1.65.** Більша діагональ правильної шестикутної призми утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть кут, який діагональ бічної грані утворює з площиною основи.
- 1.66.** Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть кут, який утворює більша діагональ призми з площиною основи.
- 1.67.** Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює більшій діагоналі основи. Знайдіть кут між діагоналями бічної грані цієї призми.
- 1.68.** Основа призми – прямокутний трикутник, а дві бічні грані призми – квадрати. Знайдіть кут між діагоналями двох рівних між собою граней, якщо ці діагоналі виходять з однієї вершини.
- 1.69.** Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Через основу цього трикутника проведено переріз, який утворює кут 45° із площиною основи і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.
- 1.70.** Основою прямої призми є рівносторонній трикутник зі стороною 2 дм. Через сторону цього трикутника прове-

дено переріз, який утворює з площиною основи кут 60° і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.

- 1.71. Основою прямої призми є ромб із гострим кутом 60° і площею $8\sqrt{3}$ см². Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом 60° .
- 1.72. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° .
- 1.73. Основою прямої призми є прямокутник, сторони якого відносяться як 1 : 2. Площа бічної поверхні призми дорівнює 90 см², а повної поверхні – 126 см². Знайдіть висоту призми.
- 1.74. Основа прямої призми – ромб із гострим кутом 30° . Площа повної поверхні призми дорівнює 33 см², а площа її бічної поверхні – 24 см². Знайдіть висоту призми.
- 1.75. Основою призми є рівносторонній трикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи призми ортогонально проектується в центр нижньої основи. Знайдіть висоту призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.
- 1.76. Основою призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є квадрат зі стороною 10 см. Вершина A_1 призми ортогонально проектується в середину сторони AB . Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо її висота дорівнює 12 см.
- 1.77. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 20 см, а основи – 41 см і 9 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює висоті основи.
- 1.78. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з меншою основою 5 см і бічними сторонами 12 см і 20 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює меншій діагоналі основи.
- 1.79. Знайдіть відношення площі найменшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми до площі її найбільшого діагонального перерізу.
- 1.80. Основою прямої призми є ромб із кутом 60° . Знайдіть відношення площі більшого діагонального перерізу призми до площі її меншого діагонального перерізу.

- 1.81.** Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а висота призми – 7 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро та меншу висоту основи призми.
- 1.82.** Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, а висота призми – 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро та середню за довжиною висоту основи.
- 1.83.** $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ – правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота – 1 см. Знайдіть площу перерізу $AB_1 C_1 D$.
- 1.84.** У правильній шестикутній призмі площа основи дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см², а бічне ребро – 1 см. Знайдіть площу меншого діагонального перерізу призми.
- 1.85.** Бічна грань правильної шестикутної призми є квадратом, периметр якого – 16 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через діагоналі паралельних бічних граней призми.
- 1.86.** $ABCA_1 B_1 C_1$ – пряма трикутна призма, основа якої – рівнобедрений трикутник ABC , $\angle C = 90^\circ$. Висота призми дорівнює 8 см, а діаметр кола, описаного навколо трикутника $AB_1 C$, дорівнює 10 см. Знайдіть площу цього трикутника.
- 1.87.** Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а найбільша бічна грань рівновелика основі. Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.88.** Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 19 см, 20 см і 37 см. Найменша бічна грань має площу вдвічі меншу за площу основи. Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.89.** На скільки частин поділяють простір площини всіх граней правильної чотирикутної призми?
- 1.90.** На скільки частин поділяють простір площини всіх граней правильної трикутної призми?
- 4 1.91.** Основою прямої призми є ромб з меншою діагоналлю завдовжки d , площа якого дорівнює Q . Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.92.** Площа основи правильної трикутної призми дорівнює $S\sqrt{3}$, а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

- 1.93.** Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 17 см і 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.
- 1.94.** Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 8 см і 7 см. Знайдіть висоту призми.
- 1.95.** У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні. Їхнє спільне бічне ребро віддалене на 3 см і 4 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 120 см^2 .
- 1.96.** Ребро похилої трикутної призми дорівнює 8 см. Дві бічні грані призми взаємно перпендикулярні, а їхнє спільне бічне ребро віддалене на 5 см і 12 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.97.** $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ – правильна шестикутна призма, у якої висота дорівнює 2 см, а площа перерізу $AB_1 C_1 D$ дорівнює 24 см^2 . Знайдіть сторону основи призми.
- 1.98.** Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло. Відношення площі діагонального перерізу призми до площі бічної грані, що містить бічну сторону основи, дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Знайдіть гострий кут трапеції.
- 1.99.** Основою прямої призми є трапеція, у якої одна сторона дорівнює 23 см, а інші – по 13 см, бічне ребро призми дорівнює 16 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через паралельні сторони основ.
- 1.100.** Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло. Периметр трапеції дорівнює 32 см, а гострий кут – 30° . Знайдіть площу перерізу призми, проведеного через паралельні сторони основ, якщо висота призми дорівнює 3 см.
- 1.101.** Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основами 21 см та 11 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2 . Знайдіть:
1) площу повної поверхні призми;
2) площу перерізу, проведеного через паралельні сторони основ.
- 1.102.** Доведіть, що більша діагональ правильної шестикутної призми менша від подвоєної діагоналі бічної грані.
- 1.103.** Діагоналі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють 9 см, $10\sqrt{2}$ см і 15 см. Основою призми є прямокутний трикутник. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

- 1.104.** Основа прямої призми – прямокутний трикутник. Діагоналі бічних граней призми дорівнюють 4 см, 7 см і 8 см. Знайдіть висоту призми.
- 1.105.** Сторони основи і бічне ребро прямої трикутної призми відносяться як 3:4:5:7, а площа повної поверхні призми дорівнює 864 см². Знайдіть висоту призми.
- 1.106.** Діагоналі двох бічних граней прямої трикутної призми нахилені до площини основи під кутами 30° і 60°. Основаю призми є рівнобедрений трикутник, периметр якого дорівнює 14 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.107.** Площа бічної поверхні правильної шестикутної призми в 4 рази більша за площу її основи. Знайдіть кут, який утворює з площиною основи:
- 1) діагональ бічної грані;
 - 2) менша діагональ призми.
- 1.108.** Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми відносяться як 5:29:30, площа перпендикулярного перерізу дорівнює 288 см². Бічне ребро призми у 8 разів менше за периметр перпендикулярного перерізу. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.109.** Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 7 см, 15 см і 20 см, а бічне ребро втричі більше за радіус кола, вписаного у перпендикулярний переріз. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
-  **1.110.** П'єдестал має форму правильної призми, основою якої є многокутник з парною кількістю сторін. Проходячи повз п'єдестал, можна бачити то 3, то 4 бічні грані. Скільки бічних граней у цього п'єдестала?
- 1.111.** Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 17 см, а менша діагональ призми дорівнює 19 см. Знайдіть сторону основи призми.
- 1.112.** У правильній шестикутній призмі кут між площиною основи та діагоналлю бічної грані на 15° більший за кут між цією площиною і меншою діагоналлю призми. Знайдіть ці кути.
- 1.113.** Довжина кожного ребра правильної шестикутної призми дорівнює 2 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середини двох паралельних сторін основи під кутом 45° до площини основи.
- 1.114.** Довжина кожного ребра правильної шестикутної призми дорівнює 3 см. Знайдіть площу перерізу, прове-

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання
№ 1

1. З деякої точки до площини проведено перпендикуляр завдовжки 5 см та похилу завдовжки 12 см. Знайдіть проекцію цієї похилої на площину.

А	Б	В	Г	Д
7 см	8 см	$\sqrt{119}$ см	13 см	інша відповідь

2. При якому значенні m вектори $\vec{a}(m; 1; -2)$ і $\vec{b}(4; 4; 2)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

3. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо дві його паралельні сторони збільшити на 10 %, а дві інші – на 20 %?

А	Б	В	Г	Д
на 10 %	на 15 %	на 20 %	на 30 %	на 32 %

4. MN – діаметр кола, а MK – хорда, яка дорівнює половині діаметра. Знайдіть величину кута KNM .

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

5. Установіть відповідність між властивістю правильного многокутника (1–4) та кількістю його сторін (А–Д).

Властивість правильного многокутника

- внутрішній кут дорівнює 150°
- зовнішній кут дорівнює 36°
- кількість діагоналей дорівнює 44
- внутрішній кут на 100° більший за зовнішній

Кількість сторін

- 9
- 10
- 11
- 12
- 13

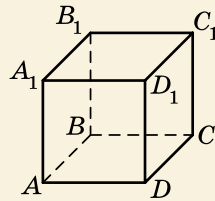
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть тангенс меншого гострого кута цього трикутника.

4. Укажіть градусну міру кута між векторами $\vec{a}(-1; 2; 4)$ і $\vec{b}(8; 0; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

5. На малюнку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Установіть відповідність між заданим кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).



Заданий кут

Градусна міра

- 1 між прямими $A_1 B_1$ і CD
- 2 між прямими $A_1 D$ і DC
- 3 між прямою $C_1 D$ і площиною ABC
- 4 між площинами $A_1 AC$ і $BB_1 D$

- А 0°
- Б 30°
- В 45°
- Г 60°
- Д 90°

А Б В Г Д

1				
2				
3				
4				

6. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, відноситься до основи трикутника як 2 : 3, бічна сторона трикутника дорівнює 20 см. Знайдіть периметр трикутника у см.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. У призмі площа бічної поверхні дорівнює 24 см^2 , а площа повної поверхні – 36 см^2 . Знайдіть площу основи.
А. 60 см^2 Б. 12 см^2 В. 6 см^2 Г. 4 см^2
2. Один із кутів чотирикутника, який є основою паралелепіпеда, дорівнює 100° . Укажіть значення, якому може дорівнювати інший кут цього чотирикутника.
А. 120° Б. 110° В. 90° Г. 80°
3. Знайдіть площу однієї грані правильного тетраедра, якщо площа повної поверхні тетраедра дорівнює 48 см^2 .
А. 24 см^2 Б. 8 см^2 В. 12 см^2 Г. 16 см^2
4. Висота похилої призми дорівнює 6 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює кут 45° із площиною основи.
А. $6\sqrt{2} \text{ см}$ Б. 6 см В. 12 см Г. $6\sqrt{3} \text{ см}$

5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а висота – 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.
 А. 20 см^2 Б. 48 см^2 В. 52 см^2 Г. 136 см^2
6. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 8 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
 А. 80 см^2 Б. 144 см^2
 В. 224 см^2 Г. $(60 + 16\sqrt{3}) \text{ см}^2$
- 3 7. У правильній трикутній призмі медіана основи дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ бічної грані утворює кут 45° із висотою призми.
 А. 16 см^2 Б. 36 см^2 В. 96 см^2 Г. 48 см^2
8. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
 А. 18 см^2 Б. 12 см^2 В. 24 см^2 Г. 20 см^2
9. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді радіуси кіл, вписаних в основи, дорівнюють 4 см і 6 см, а бічне ребро утворює кут 30° із висотою піраміди. Знайдіть висоту зрізаної піраміди.
 А. $2\sqrt{2}$ см Б. $2\sqrt{3}$ см В. $2\sqrt{6}$ см Г. 4 см
- 4 10. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого – 24 см^2 . Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють 30 см^2 і 40 см^2 . Знайдіть висоту паралелепіпеда.
 А. 4 см Б. 3 см В. 6 см Г. 5 см
11. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 20 см. Дві бічні грані призми взаємно перпендикулярні, а їхнє спільне ребро віддалене на 7 см і 24 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
 А. 620 см^2 Б. 1120 см^2 В. 560 см^2 Г. 1680 см^2
12. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60° . Знайдіть двогранний кут при бічному ребрі піраміди.
 А. $2\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$ Б. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$
 В. $2\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$ Г. $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1-4

1. У призмі площа бічної поверхні дорівнює 28 см^2 , а площа основи – 12 см^2 . Знайдіть площу повної поверхні призми.
2. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, основа якої – чотирикутник, кути якого відповідно дорівнюють:
1) $30^\circ; 150^\circ; 30^\circ; 150^\circ$; 2) $20^\circ; 160^\circ; 30^\circ; 150^\circ$?
3. Знайдіть площу повної поверхні правильного тетраедра, площа однієї грані якого дорівнює 5 см^2 .
4. Бічне ребро похилої призми дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть висоту цієї призми.
5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см , а висота – 5 см . Знайдіть:
1) площу діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) площу повної поверхні паралелепіпеда.
6. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см , а сторона основи – 6 см . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
7. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $6\sqrt{2} \text{ см}$. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ призми утворює з бічним ребром кут 45° .
8. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см . Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см . Знайдіть висоту піраміди.
9. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм із тупим кутом 150° і площею 15 см^2 . Площі бічних граней паралелепіпеда дорівнюють 20 см^2 і 24 см^2 . Знайдіть висоту паралелепіпеда.

Додаткові завдання

10. У правильній зрізаній трикутній піраміді сторони основ дорівнюють 9 см і 6 см , а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть висоту зрізаної піраміди.
11. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні. Їхнє спільне ребро віддалене на 8 см і 15 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 200 см^2 .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1. Укажіть основи, бічні грані, сторони основ, бічні ребра та вершини призми, зображеної на малюнку 4.4.

2. Скільки бічних ребер і граней у шестикутній призмі?

3. Площа повної поверхні призми дорівнює 24 см^2 , а площа основи дорівнює 5 см^2 . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

4. У трикутній призмі всі бічні грані між собою рівні. Знайдіть площу однієї такої грані, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює 27 см^2 .

5. Визначте кількість сторін многокутника, що є основою призми, якщо у призми: 1) 15 граней; 2) 9 ребер.

6. Основою прямої призми є правильний шестикутник зі стороною 5 см. Діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

7. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює 2 дм, а площа бічної поверхні в $\sqrt{3}$ разів більша за площу основи. Знайдіть бічне ребро призми.

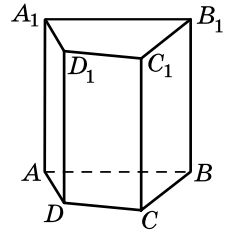
8. Проекція бічного ребра на площину основи похилої призми дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 45° .

9. Основою прямої призми є ромб зі стороною 6 см і гострим кутом 60° . Знайдіть площі діагональних перерізів призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

10. Через сторону основи правильної трикутної призми під кутом 30° до основи проведено переріз, який перетинає бічне ребро. Знайдіть сторону основи призми, якщо площа перерізу дорівнює 8 см^2 .

11. Основою прямої чотирикутної призми є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 6 см, а діагональ – 10 см. Діагональ бічної грані, що містить більшу сторону основи, нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайдіть площу повної поверхні призми.

12. Висота ромба, що є основою прямої призми, дорівнює 1 дм. Площа бічної поверхні призми – 24 дм^2 , а площа її повної поверхні – 32 дм^2 . Знайдіть висоту призми.



Мал. 4.4.

ЗМІСТ

<i>Шановні одинадцятикласниці та одинадцятикласники!</i> ...	3
<i>Шановні вчительки та вчителі!</i>	4
Розділ 1. МНОГОГРАННИКИ	5
§ 1. Двогранні та многогранні кути. Многогранник. Призма.....	6
§ 2. Паралелепіпед	27
§ 3. Піраміда	44
§ 4. Правильні многогранники	72
<i>Домашня самостійна робота № 1</i>	79
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 1–4</i>	81
Вправи для повторення розділу 1	82
Розділ 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ	88
§ 5. Тіла та поверхні обертання. Циліндр.....	89
§ 6. Конус	102
§ 7. Куля і сфера	115
§ 8. Комбінації геометричних тіл	130
<i>Домашня самостійна робота № 2</i>	153
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 5–8</i>	155
Вправи для повторення розділу 2	156
<i>Україна у світі</i>	162
Розділ 3. ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ	163
§ 9. Об'єм тіла. Об'єм призми та паралелепіпеда.....	164
§ 10. Об'єм піраміди. Об'єм зрізаної піраміди.....	183
<i>Домашня самостійна робота № 3</i>	201
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 9–10</i>	202
Вправи для повторення розділу 3	203
Розділ 4. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ	208
§ 11. Об'єм циліндра.....	209
§ 12. Об'єм конуса і зрізаного конуса.....	217
§ 13. Об'єм кулі та її частин	227
§ 14. Площі поверхонь тіл обертання.....	241
<i>Домашня самостійна робота № 4</i>	258
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 11–14</i>	259

Вправи для повторення розділу 4	260
<i>Українки у світі</i>	266
Відповіді та вказівки до вправ	267
Предметний покажчик	281