ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Посібник «Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 9 клас» призначено для проведення державної підсумкової атестації з математики в дев'ятих класах загальноосвітніх навчальних закладів, а також перевірки знань і вмінь учнів протягом навчального року. Він містить 50 варіантів атестаційних робіт, кожний з яких складається із чотирьох частин. Ці частини відрізняються за формою тестових завдань і за рівнем їх складності. Зміст усіх завдань відповідає чинній програмі для загальноосвітніх навчальних закладів та програмі для шкіл, ліцеїв і гімназій з поглибленим вивченням математики.

Учні загальноосвітніх класів виконують усі завдання першої, другої та третьої частин атестаційної роботи.

Учні класів з поглибленим вивченням математики виконують завдання першої, другої, третьої та четвертої частин.

Державна підсумкова атестація з математики проводиться протягом 3 академічних годин для учнів загальноосвітніх класів. Учні класів з поглибленим вивченням математики виконують атестаційну роботу протягом 4 академічних годин.

Структура, зміст та оцінювання завдань атестаційної роботи

У ***першій частині*** кожної атестаційної роботи пропонується 12 завдань з вибором однієї правильної відповіді. До кожного завдання наведено чотири можливі варіанти відповіді, з яких тільки одна є правильною. Завдання з вибором однієї відповіді вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей[1] указано тільки одну літеру, якою позначена правильна відповідь. При цьому учень не повинен наводити будь-яких міркувань, що пояснюють його вибір.

Розподіл завдань першої частини за класами, предметами та рівнями складності наведено в таблиці 1.

Правильне розв'язання кожного завдання першої частини 1.1–1.12 оцінюється одним балом. Якщо у бланку відповідей указано правильну відповідь, то за це завдання нараховується 1 бал, якщо ж указана учнем відповідь є неправильною, то виконання завдання оцінюється у 0 балів.

Друга частина атестаційної роботи складається із 4 завдань відкритої форми з короткою відповіддю. Завдання цієї частини вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей записана тільки правильна відповідь (наприклад, число, вираз, корені рівняння тощо). Усі необхідні обчислення, перетворення тощо учні виконують на чернетках.

[1] Зразок бланка відповідей наведено в кінці посібника.

Таблиця 1

Номер завдання	Відповідність завдання класу навчання	Предмет	Відповідність завдання рівню навчальних досягнень учнів	Примітка
1.1	5 кл.	математика	початковий або середній	Одне із завдань 1.1, 1.2 початкового рівня, а інше – середнього
1.2	6 кл.	математика	початковий або середній	
1.3	7 кл.	алгебра	початковий	
1.4	7 кл.	алгебра	середній	
1.5	8 кл.	алгебра	початковий	
1.6	8 кл.	алгебра	середній	
1.7	9 кл.	алгебра	початковий	
1.8	9 кл.	алгебра	середній	
1.9	7 кл.	геометрія	початковий або середній	Одне із завдань 1.9, 1.10 початкового рівня, а інше – середнього
1.10	8 кл.	геометрія	початковий або середній	
1.11	9 кл.	геометрія	початковий	
1.12	9 кл.	геометрія	середній	

Розподіл завдань другої частини за класами, предметами та рівнями складності наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

Номер завдання	Відповідність завдання класу навчання	Предмет	Відповідність завдання рівню навчальних досягнень учнів
2.1	7–9 кл.	алгебра	достатній
2.2	7–9 кл.	алгебра	достатній
2.3	7–9 кл.	алгебра	достатній
2.4	7–9 кл.	геометрія	достатній

Правильне розв’язання кожного із завдань 2.1–2.4 оцінюється двома балами: якщо у бланку відповідей указано правильну відповідь до завдання, то за це нараховується 2 бали, якщо ж указана учнем відповідь є неправильною, то бали за таке завдання не нараховуються. Часткове виконання завдання другої частини (наприклад, якщо учень правильно знайшов один з двох коренів рівняння або розв’язків системи рівнянь) оцінюється 1 балом.

Якщо учень вважає за потрібне внести зміни у відповідь до якогось із завдань першої чи другої частини, то він має це зробити у спеціально відведеній для цього частині бланка. Таке виправлення не веде до втрати балів. Якщо ж виправлення зроблено в основній частині бланка відповідей, то бали за таке завдання не нараховуються.

Перевірка учнівських записів (чернеток) учителем у завданнях першої та другої частин не є обов'язковою.

Третя і четверта частини атестаційної роботи складаються із завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Такі завдання вважаються виконаними правильно, якщо учень навів розгорнутий запис розв'язування з обґрунтуванням кожного його етапу та дав правильну відповідь. Завдання третьої та четвертої частин атестаційної роботи учень виконує на аркушах зі штампом відповідного загальноосвітнього навчального закладу. Формулювання завдань третьої і четвертої частин учень не переписує, а тільки вказує номер завдання.

Третя частина атестаційної роботи містить три завдання, четверта частина – два. Розподіл завдань третьої та четвертої частин за класами, предметами та рівнями складності наведено відповідно у таблицях 3 і 4.

Таблиця 3

Номер завдання	Відповідність завдання класу навчання	Предмет	Відповідність завдання рівню навчальних досягнень учнів	Примітка
3.1	7–9 кл.	алгебра	достатній	Текстова задача, що розв'язується за допомогою рівняння або системи рівнянь
3.2	7–9 кл.	алгебра	високий	
3.3	7–9 кл.	геометрія	високий	

Таблиця 4

Номер завдання	Відповідність завдання класу навчання	Предмет	Відповідність завдання рівню навчальних досягнень учнів	Примітка
4.1^{м}	8–9 кл.	алгебра	високий	Завдання 4.1^{м}, 4.2^{м} відповідають програмі класів з поглибленим вивченням математики
4.2^{м}	8–9 кл.	геометрія	високий	

Правильне розв'язання завдання 3.1 оцінюється чотирма балами, а кожне із завдань 3.2, 3.3, 4.1^{м}, 4.2^{м} – шістьма балами.

Для оцінювання в балах завдань третьої та четвертої частин атестаційної роботи пропонується користуватися критеріями, наведеними в таблиці 5.

Таблиця 5

<table>
<tr><th rowspan="2">Що виконав учень</th><th colspan="2">Відповідна кількість балів за завдання</th></tr>
<tr><th>Максимальний бал – 6</th><th>Максимальний бал – 4</th></tr>
<tr><td>Отримав правильну відповідь і навів повне її обґрунтування</td><td>6 балів</td><td>4 бали</td></tr>
<tr><td>Отримав правильну відповідь, але вона недостатньо обґрунтована або розв'язання містить незначні недоліки</td><td>5 балів</td><td rowspan="2">3 бали</td></tr>
<tr><td>Отримав відповідь, записав правильний хід розв'язування завдання, але в процесі розв'язування припустився помилки обчислювального або логічного (при обґрунтуванні) характеру</td><td>4 бали</td></tr>
<tr><td>Суттєво наблизився до правильного кінцевого результату або в результаті знайшов лише частину правильної відповіді</td><td>3 бали</td><td>2 бали</td></tr>
<tr><td>Розпочав розв'язувати завдання правильно, але в процесі розв'язування припустився помилки у застосуванні необхідного твердження чи формули</td><td>2 бали</td><td rowspan="2">1 бал</td></tr>
<tr><td>Лише розпочав правильно розв'язувати завдання або розпочав неправильно, але наступні етапи розв'язування виконав правильно</td><td>1 бал</td></tr>
<tr><td>Розв'язання не відповідає жодному з наведених вище критеріїв</td><td>0 балів</td><td>0 балів</td></tr>
</table>

Виправлення і закреслення в оформленні розв'язання завдань третьої та четвертої частин, якщо вони зроблені акуратно, не є підставою для зниження оцінки.

Наведені критерії мають бути відомі учням.

Переведення оцінки у балах в оцінку за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів

Сума балів, нарахованих за виконані учнем завдання, переводиться в оцінку за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів за спеціальною шкалою.

Для учнів ***загальноосвітніх класів*** максимально можлива сума балів за атестаційну роботу становить 36 (див. таблицю 6). Відповідність кількості набраних учнем балів оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено в таблиці 7.

Таблиця 6

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1.1–1.12	по 1 балу	12 балів
2.1–2.4	по 2 бали	8 балів
3.1	4 бали	4 бали
3.2, 3.3	по 6 балів	12 балів
Сума балів		36 балів

Таблиця 7

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів
0–2	1
3–4	2
5–6	3
7–8	4
9–10	5
11–12	6
13–16	7
17–20	8
21–24	9
25–28	10
29–32	11
33–36	12

Для учнів класів з ***поглибленим вивченням математики*** максимально можлива сума балів за атестаційну роботу становить 48 (див. таблицю 8). Відповідність кількості набраних учнем балів оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено в таблиці 9.

Таблиця 8

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1.1–1.12	по 1 балу	12 балів
2.1–2.4	по 2 бали	8 балів
3.1	4 бали	4 бали
3.2, 3.3	по 6 балів	12 балів
$4.1^м$, $4.2^м$	по 6 балів	12 балів
Сума балів		48 балів

Таблиця 9

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів
0–3	1
4–6	2
7–9	3
10–12	4
13–15	5
16–18	6
19–23	7
24–28	8
29–33	9
34–38	10
39–43	11
44–48	12

Зразок виконання тестових завдань і заповнення бланка відповідей

Зразок виконання завдань атестаційної роботи і заповнення бланка відповідей для першої та другої частин розглянемо на прикладі одного з варіантів.

Частина перша

Завдання 1.1–1.12 мають по чотири варіанти відповіді, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1.1. Яке із чисел 2; 5; 8 є коренем рівняння $2x - 3 = 7$?

А) 2; **Б)** 5; **В)** 8; **Г)** жодне.

Розв'язання.
Оскільки $2 \cdot 2 - 3 = 1 \neq 7$; $2 \cdot 5 - 3 = 7$; $2 \cdot 8 - 3 = 13 \neq 7$, то число 5 є коренем рівняння.

Відповідь. Б).

1.2. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел 80 і 48.

А) 8; **Б)** 12; **В)** 16; **Г)** 240.

Розв'язання. $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Тому НСД $(80; 48) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Відповідь. В).

1.3. Який з виразів є одночленом?

А) $4x - y$; **Б)** $4xy$; **В)** $4 + xy$; **Г)** $\frac{4x}{y}$.

Відповідь. Б).

1.4. Подайте добуток $(5x + y)(y - 5x)$ як многочлен стандартного вигляду.

А) $25x^2 + y^2$; **Б)** $25x^2 - y^2$; **В)** $y^2 - 5x^2$; **Г)** $y^2 - 25x^2$.

Розв'язання.
$(5x + y)(y - 5x) = (y + 5x)(y - 5x) = y^2 - (5x)^2 = y^2 - 25x^2$.

Відповідь. Г).

1.5. $\frac{m^6}{8} : \frac{m^2}{2} = \ldots$

А) $\frac{m^4}{4}$; **Б)** $4m^4$; **В)** $\frac{m^3}{4}$; **Г)** $\frac{m^4}{6}$.

Розв'язання. $\frac{m^6}{8} : \frac{m^2}{2} = \frac{m^6}{8} \cdot \frac{2}{m^2} = \frac{2m^6}{8m^2} = \frac{m^4}{4}$.

Відповідь. А).

1.6. Обчисліть значення виразу $-16\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

А) -5; **Б)** 5; **В)** -20; **Г)** 20.

Р о з в ' я з а н н я.

$$-16\sqrt{1\frac{9}{16}} = -16\sqrt{\frac{25}{16}} = -16\cdot\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = -16\cdot\frac{5}{4} = -20.$$

Відповідь. В).

1.7. Відомо, що $m > n$. Яка з нерівностей правильна?

А) $-m > -n$; **Б)** $5n > 5m$; **В)** $4m < 4n$; **Г)** $-4m < -4n$.

Відповідь. Г).

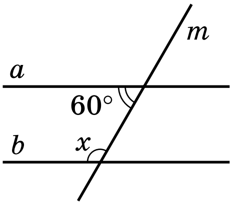
1.8. (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 2$; $a_2 = 7$. Знайдіть a_{21}.

А) 97; **Б)** 102; **В)** 107; **Г)** інша відповідь.

Р о з в ' я з а н н я. $d = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$; $a_n = a_1 + d(n - 1)$; тому $a_{21} = 2 + 5(21 - 1)$; $a_{21} = 102$.

Відповідь. Б).

1.9. На малюнку прямі a і b – паралельні, m – січна. Знайдіть градусну міру кута x.

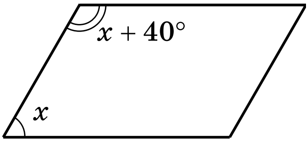


А) 120°; **Б)** 90°; **В)** 60°; **Г)** 30°.

Відповідь. А).

1.10. Знайдіть градусну міру гострого кута паралелограма, якщо один з його кутів на 40° більший за інший.

А) 40°; **Б)** 50°; **В)** 60°; **Г)** 70°.



Р о з в ' я з а н н я. Нехай гострий кут паралелограма дорівнює x, тоді тупий кут дорівнює $x + 40°$. Маємо рівняння $x + x + 40° = 180°$. Звідси $x = 70°$.

Відповідь. Г).

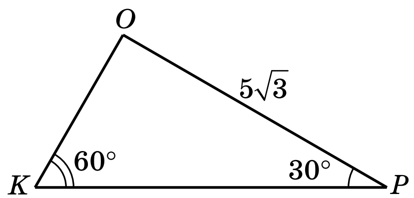
1.11. Знайдіть площу трикутника, сторони якого 4 см і 7 см, а кут між ними дорівнює 30°.

А) 7 см^2; **Б)** 14 см^2; **В)** 21 см^2; **Г)** 28 см^2.

Розв'язання. $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 7$ (см^2).

Відповідь. А).

1.12. У $\triangle OPK$ $OP = 5\sqrt{3}$, $\angle K = 60°$, $\angle P = 30°$. Знайдіть довжину OK.



А) $5\sqrt{1,5}$; **Б)** 5; **В)** 10; **Г)** $5\sqrt{2}$.

Розв'язання.

За теоремою синусів: $\frac{OP}{\sin K} = \frac{OK}{\sin P}$; $\frac{5\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{OK}{\sin 30°}$;

$$OK = \frac{5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5.$$

Відповідь. Б).

Оформлення бланка відповідей першої частини

	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
1.1		X			**1.5**	X				**1.9**	X			
1.2			X		**1.6**			X		**1.10**				X
1.3		X			**1.7**				X	**1.11**	X			
1.4				X	**1.8**		X			**1.12**		X		

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1–2.4. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{2x}{x-2} + \frac{x+7}{8-4x} \cdot \frac{32}{7x+x^2}$.

Розв'язання. Виконаємо спрощення виразу на його області допустимих значень.

$$\frac{2x}{x-2}+\frac{x+7}{8-4x}\cdot\frac{32}{7x+x^2}=\frac{2x}{x-2}+\frac{32(x+7)}{4(2-x)\cdot x(7+x)}=$$

$$=\frac{2x}{x-2}+\frac{8}{x(2-x)}=\frac{2x}{x-2}-\frac{8}{x(x-2)}=\frac{2x^2-8}{x(x-2)}=\frac{2(x^2-4)}{x(x-2)}.$$

Виконаємо скорочення дробу на $(x-2)$ за умови, що $x \neq 2$.

$$\frac{2(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\frac{2(x+2)}{x}=\frac{2x+4}{x}.$$

Відповідь. $\frac{2x+4}{x}$.

2.2. На параболі, що є графіком функції $y=x^2-2x$, знайдіть точки, для яких сума абсциси та ординати дорівнює 6.

Розв'язання. Нехай $(x;\ y)$ – шукана точка, тоді її координати задовольняють умову $x+y=6$. Маємо систему $\begin{cases} x+y=6, \\ y=x^2-2x. \end{cases}$ З першого рівняння системи отримаємо $y=6-$ $-x$ і підставимо вираз $6-x$ замість y у друге рівняння. Маємо $6-x=x^2-2x$; $x^2-x-6=0$; $x_1=-2$; $x_2=3$. Тоді $y_1=8$; $y_2=3$. Шукані точки: $(-2;\ 8)$ і $(3;\ 3)$.

Відповідь. $(-2;\ 8)$, $(3;\ 3)$.

2.3. Розв'яжіть нерівність $(5x-1)^2-2 \leqslant (4x-2)^2+(3x+2)^2$?

Розв'язання. Маємо: $25x^2-10x+1-2 \leqslant 16x^2-16x+$ $+4+9x^2+12x+4$, тобто $-6x \leqslant 9$, тому маємо: $x \geqslant -1{,}5$. Отже, $x \in [-1{,}5;\ +\infty)$.

Відповідь. $[-1{,}5;\ +\infty)$.

2.4. Знайдіть на осі ординат точку, рівновіддалену від точок $M(3;\ 6)$ і $N(4;\ -1)$.

Розв'язання. Нехай $A(0;\ y)$ – шукана точка. За умовою $AM=AN$, а тому $AM^2=AN^2$. Маємо: $AM^2=3^2+(y-6)^2$; $AN^2=4^2+(y+1)^2$.

Тоді $9+y^2-12y+36=16+y^2+2y+1$; $-14y=-28$; $y=2$.

Отже, $A(0;\ 2)$ – шукана точка.

Відповідь. $(0;\ 2)$.

Оформлення бланка відповідей другої частини

2.1	$\frac{2x+4}{x}$	**2.3**	6450 грн
2.2	(–2; 8), (3; 3)	**2.4**	(0; 2)

Частина третя

Розв'язання завдань 3.1–3.3 повинні мати обґрунтування. У них потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Автобус запізнювався на 12 хв. Щоб прибути вчасно, за 90 км від пункту призначення він збільшив швидкість на 5 км/год. За який час мав проїхати автобус 90 км за розкладом?

Розв'язання. Нехай швидкість автобуса за розкладом – x км/год. Систематизуємо дані у вигляді таблиці.

Рух	s, км	v, км/год	t, год
За розкладом	90	x	$\frac{90}{x}$
Після збільшення швидкості	90	$x+5$	$\frac{90}{x+5}$

Оскільки величина $\frac{90}{x+5}$ на 12 хв $= \frac{12}{60}$ год $= \frac{1}{5}$ год менша за величину $\frac{90}{x}$, то маємо рівняння: $\frac{90}{x} - \frac{90}{x+5} = \frac{1}{5}$.

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$\frac{90x + 450 - 90x}{x(x+5)} = \frac{1}{5}; \quad x(x+5) = 5 \cdot 450;$$

$$x^2 + 5x - 2250 = 0; \quad x_1 = 45; \ x_2 = -50.$$

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість автобуса за розкладом 45 км/год. Час, за який мав проїхати автобус 90 км за розкладом, дорівнює $\frac{90}{45} = 2$ (год).

Відповідь. 2 год.

3.2. Доведіть, що коли a, b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то $(a + 2b)^2 = 8ab + c^2$.

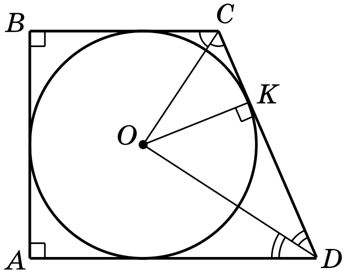
Доведення. Оскільки a, b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то $\frac{a+c}{2} = b$, тобто $2b = a + c$.

Розглянемо різницю лівої та правої частин рівності, яку треба довести, і спростимо її:

$(a + 2b)^2 - (8ab + c^2) = a^2 + 4ab + 4b^2 - 8ab - c^2 = a^2 - 4ab + 4b^2 - c^2 = (a - 2b)^2 - c^2 = (a - (a + c))^2 - c^2 = (-c)^2 - c^2 = 0.$

Отже, $(a + 2b)^2 = 8ab + c^2$, що й вимагалося довести.

3.3. Відстані від центра кола, вписаного у прямокутну трапецію, до кінців більшої бічної сторони дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть площу круга, який обмежений цим колом.



Розв'язання. На малюнку зображено коло, вписане у прямокутну трапецію $ABCD$, у якої $\angle A = \angle B = 90°$. Точка O – центр цього кола. За умовою $OC = 12$ см, $OD = 16$ см. Точка O є точкою перетину бісектрис кутів BCD і CDA. У $\triangle OCD$:

$$\angle COD = 180° - (\angle OCD + \angle ODC) = 180° - \left(\frac{\angle BCD}{2} + \frac{\angle ADC}{2}\right) =$$

$$= 180° - \frac{\angle BCD + \angle ADC}{2} = 180° - \frac{180°}{2} = 90°.$$

Отже, трикутник OCD – прямокутний; OC і OD – його катети. Тоді $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ (см).

Нехай K – точка дотику вписаного кола до сторони CD. Оскільки $OK \perp CD$, то OK – висота прямокутного трикутника OCD. Виразимо площу S цього трикутника двома способами:

$$S = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot OK.$$

Звідси маємо $OC \cdot OD = CD \cdot OK$,

$OK = \dfrac{OC \cdot OD}{CD}$; $OK = \dfrac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6$ (см),

$OK = r$ − радіус кола.

Тоді площа круга, який обмежений цим колом,

$$S_{\text{кр}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 9{,}6^2 = 92{,}16\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. $92{,}16\pi$ см^2.

Частина четверта

Розв'язання завдань 4.1м, 4.2м повинні мати обґрунтування. У них потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1м. При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{x^2 - 6x + 8 + 2a - a^2}{x - 2} = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 + 2a - a^2 = 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння, матимемо:

$$D = 36 - 4(8 + 2a - a^2) = 4a^2 - 8a + 4 = 4(a-1)^2;$$

$$x_1 = \frac{6 + 2(a-1)}{2} = a + 2;\ x_2 = \frac{6 - 2(a-1)}{2} = 4 - a.$$

Рівняння, що задано в умові, має єдиний корінь в одному з таких випадків:

1) $x_1 = x_2$ і $x_1 \neq 2$;

2) $x_1 = 2$; $x_2 \neq 2$;

3) $x_2 = 2$; $x_1 \neq 2$.

Розглянемо ці випадки по черзі.

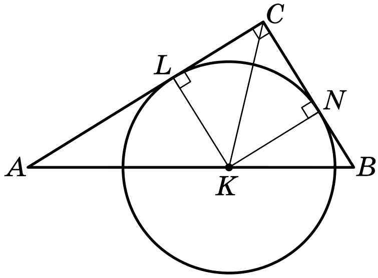
1) $a + 2 = 4 - a$; $a = 1$. У цьому випадку $x_1 = 3 \neq 2$. Отже, $a = 1$ задовольняє умову задачі.

2) $\begin{cases} a + 2 = 2, \\ 4 - a \neq 2; \end{cases}$ $a = 0$.

3) $\begin{cases} 4 - a = 2, \\ a + 2 \neq 2; \end{cases}$ $a = 2$.

Відповідь. $a = 1$, $a = 0$, $a = 2$.

4.2м. Центр кола, яке дотикається катетів прямокутного трикутника, належить гіпотенузі цього трикутника. Знайдіть радіус кола, якщо його центр ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см.



Р о з в ’ я з а н н я. На малюнку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), точка K – центр кола, яке дотикається катетів AC і BC, $AK = 20$ см, $KB = 15$ см.

L – точка дотику кола катета AC; N – точка дотику кола катета BC; $KL = KN = r$ – радіус кола.

$\triangle CLK = \triangle CNK$ (за катетом і гіпотенузою), тому $\angle LCK = \angle NCK$ і CK – бісектриса $\triangle ABC$.

За властивістю бісектриси $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AK}{KB}$; $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$.

Позначимо $AC = 4x$; $BC = 3x$. Тоді $(4x)^2 + (3x)^2 = 35^2$; $x = 7$; $AC = 28$ см; $BC = 21$ см.

Площа S трикутника ABC:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 21 = 294 \text{ (см}^2\text{)}.$$

З іншого боку,

$$S = S_{\triangle ACK} + S_{\triangle CKB} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot KL + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot KN =$$

$$= \frac{1}{2} r(AC + BC) = \frac{1}{2} r(28 + 21) = \frac{49}{2} r.$$

Маємо $\dfrac{49}{2} r = 294$; $r = 12$ (см).

Відповідь. 12 см.

РОЗДІЛ I

ВАРІАНТ 1

Частина перша

Завдання 1.1–1.12 мають по чотири варіанти відповіді, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1.1. Яка з наведених нерівностей є правильною?

А) $3031 < 3021$; **Б)** $2591 > 2501$;
В) $44\,371 > 44\,381$; **Г)** $780\,325 > 783\,025$.

1.2. Виконайте ділення $4\frac{1}{6} : 5$.

А) $20\frac{5}{6}$; **Б)** $\frac{2}{3}$; **В)** $16\frac{2}{3}$; **Г)** $\frac{5}{6}$.

1.3. Укажіть функцію, яка є прямою пропорційністю.

А) $y = \frac{5}{x}$; **Б)** $y = 5$; **В)** $y = \frac{5}{x} + 4$; **Г)** $y = 5x$.

1.4. Розв'язком якого з рівнянь є пара чисел $(1; -1)$?

А) $x^2 + y^2 = 2$; **Б)** $0 \cdot x - 0 \cdot y = 2$;
В) $2x - y = 1$; **Г)** $3x + 0 \cdot y = 2$.

1.5. Виконайте додавання $\frac{2x}{y} + \frac{y}{4}$.

А) $\frac{2x + y}{4y}$; **Б)** $\frac{8x + y^2}{4 + x}$; **В)** $\frac{8x + y^2}{4y}$; **Г)** $\frac{2x + y}{4 + y}$.

1.6. Знайдіть корені рівняння $x^2 + 6x = 0$.

А) 0; **Б)** -6; **В)** 6; 0; **Г)** -6; 0.

1.7. Відомо, що $a > b$. Яка з нерівностей є хибною?

А) $a + 7 > b + 7$; **Б)** $-7a > -7b$;
В) $-7a < -7b$; **Г)** $\frac{a}{7} > \frac{b}{7}$.

1.8. Послідовність задано формулою $c_n = 4n + 11$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює 79.

А) 16; **Б)** 11; **В)** 18; **Г)** 17.

1.9. Який кут утворюють між собою стрілки годинника о 16 годині?

А) 100°; **Б)** 110°; **В)** 120°; **Г)** 130°.

1.10. Один з кутів паралелограма дорівнює 60°. Знайдіть решту його кутів.

А) 150°, 30°, 30°; **Б)** 60°, 60°, 60°;

В) 100°, 100°, 60°; **Г)** 120°, 60°, 120°.

1.11. У трикутнику ABC $\sin B = 0{,}2$, $\sin C = 0{,}4$, $b = 3$ см. Знайдіть c.

А) 1,5 см; **Б)** 4 см; **В)** 2 см; **Г)** 6 см.

1.12. При якому значенні x вектори $\vec{c}(3;\ 9)$ та $\vec{d}(3;\ x)$ перпендикулярні?

А) 1; **Б)** 9; **В)** −1; **Г)** 3.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1–2.4. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть $3\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}} - \sqrt{(-4)^6}$.

2.2. Графіком квадратичної функції є парабола, що має вершину в початку координат і проходить через точку $A(2;\ -8)$. Задайте цю функцію формулою.

2.3. Скільки різних чотирицифрових чисел, у запису яких є тільки непарні цифри, можна скласти, якщо цифри в кожному з чисел не повторюються?

2.4. Зовнішній кут правильного многокутника становить $\frac{1}{5}$ внутрішнього. Знайдіть кількість сторін цього многокутника.

ВАРІАНТ 2

Частина перша

Завдання 1.1–1.12 мають по чотири варіанти відповіді, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1.1. У Аліси було 10,2 кг суниць. Вона розклала їх у п'ять однакових кошиків. По скільки кг суниць Аліса поклала в кожний кошик?

А) 2,04 кг; **Б)** 2 кг; **В)** 2,4 кг; **Г)** 2,14 кг.

1.2. $10 - 5\frac{2}{5} = \ldots$

А) $5\frac{3}{5}$; **Б)** $4\frac{3}{5}$; **В)** $5\frac{2}{5}$; **Г)** $4\frac{2}{5}$.

1.3. Укажіть вираз, який є часткою від ділення числа m на потроєну різницю чисел n і k.

А) $\frac{m}{3n-k}$; **Б)** $\frac{3m}{n-k}$; **В)** $\frac{m}{3(n-k)}$; **Г)** $m \cdot 3(n-k)$.

1.4. Розв'яжіть рівняння $|x| + 4 = 17$.

А) 21; **Б)** −21, 21; **В)** 13; **Г)** −13, 13.

1.5. Перетворіть у дріб $12x^{12} \cdot \frac{y^3}{8x^4}$.

А) $\frac{2}{3x^8y^3}$; **Б)** $\frac{3y^3}{2x^8}$; **В)** $\frac{3}{2}x^8y^3$; **Г)** $\frac{2}{3}x^8y^3$.

1.6. Скоротіть дріб $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}$.

А) $a+\sqrt{5}$; **Б)** $\frac{1}{a+\sqrt{5}}$; **В)** $a-\sqrt{5}$; **Г)** $\frac{1}{a-\sqrt{5}}$.

1.7. Знайдіть координати вершини параболи $y = (x-1)^2 + 2$.

А) (−1; 2); **Б)** (1; 2);

В) (2; −1); **Г)** (−2; 1).

1.8. Скількома способами можна вишикувати в ряд 5 учнів?

А) 120; **Б)** 5^5;

В) 25; **Г)** 24.

ВАРІАНТ 31

Частина третя

Розв'язання завдань 3.1–3.3 повинні мати обґрунтування. У них потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Автомобіль мав проїхати 1200 км з певною швидкістю. Після того як він проїхав третину шляху із цією швидкістю, автомобіль витратив на зупинку 2 год. Збільшивши швидкість на 20 км/год, автомобіль прибув у пункт призначення вчасно. Якою була швидкість автомобіля спочатку?

3.2. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{3-a}{a^2-2a+1}-\frac{2}{1-a}\right)\left(\frac{a^2-3a}{a^3+3a^2+3a+1}+\frac{1}{a^2+2a+1}\right)$$

є додатним при всіх допустимих значеннях змінної.

3.3. У паралелограмі гострий кут дорівнює $60°$, а діагональ ділить тупий кут у відношенні $3:1$. Обчисліть периметр паралелограма, якщо його менша діагональ дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

Частина четверта

Розв'язання завдань 4.1м, 4.2м повинні мати обґрунтування. У них потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1м. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x^2+2y^2-4xy=17, \\ y^2-x^2=16. \end{cases}$

4.2м. Знайдіть площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 1 см і $\sqrt{15}$ см, а медіана, яка проведена до третьої сторони, дорівнює 2 см.

ЗМІСТ