Шановні одинадцятикласниці та одинадцятикласники!

В 11 класі ви завершуєте вивчення шкільного курсу стереометрії.

Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам оволодіти такою системою знань з геометрії та набути таких компетентностей, які знадобляться не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності, та які дадуть змогу продовжити навчання у вищих навчальних закладах.

Для зручності користування підручником його матеріал поділено на розділи, параграфи, рубрики. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої робіт та практичної діяльності тощо.

Вивчення стереометрії потребує логічного мислення, просторової уяви та наполегливості. Теоретичний матеріал підручника авторський колектив намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами з повсякденного життя.

У підручнику використовуються такі умовні позначки:

– треба запам'ятати;

– запитання до параграфів;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);

– теорема; – наслідок з теореми; – доведення закінчено;

1.24 – вправа для виконання в класі;

1.25 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Рубрика **«Розв'яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної та домашньої робіт, усних вправ, завдань для проєктної і практичної діяльності, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. Рубрика **«Задачі підвищеної складності»** містить завдання для поглиблення знань з геометрії та підготовки до різноманітних математичних змагань. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується розв'язати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми.

У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю та підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в повсякденному житті. Рубрика **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** містить задачі, які зазвичай називають нестандартними, задачі математичних олімпіад різних країн світу, задачі, які сформулювали видатні математики тощо. Наприкінці кожного параграфа в рубриці **«Перевірте свою компетентність»** ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити шкільний курс геометрії, перевірити рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, виконавши завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**.

У кінці кожного розділу наведено вправи для його повторення.

Підручник містить багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку геометрії як науки.

Успіхів вам на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

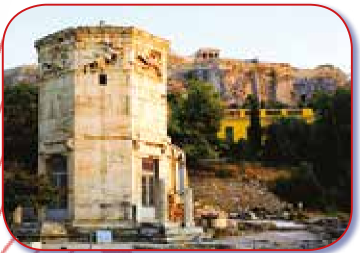
Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів геометрії. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невіддільної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг опанувати систему математичних знань, набути навичок та вмінь, потрібних у повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість. Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики) поділу навчального матеріалу на теоретичну та практичну складові, підручник містить рубрику «Життєва математика», що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та формуватиме в учнів предметні та ключові компетентності. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик «Цікаві задачі для учнів неледачих» і «Задачі підвищеної складності» допоможуть забезпечити особистісно-орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення геометрії.

У підручник включено велику кількість задач і вправ, завдання для проєктної та практичної діяльності, а в кінці кожного розділу розміщено додаткові вправи для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу розділу.

Успіхів вам у вашій нелегкій праці!

РОЗДІЛ 1

МНОГОГРАННИКИ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

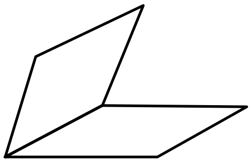
- ***пригадаєте***, що таке прямокутний паралелепіпед, піраміда та їхні елементи; як будувати перерізи цих фігур;
- ***дізнаєтеся***, що таке призма та її елементи;
- ***познайомитеся*** з поняттями геометричного тіла, правильного многогранника; видами правильних многогранників; теоремою Ейлера;
- ***навчитеся*** зображувати призму, паралелепіпед, піраміду; обчислювати їхні елементи; знаходити площі поверхонь многогранників.

§ 1. ДВОГРАННІ ТА МНОГОГРАННІ КУТИ. МНОГОГРАННИК. ПРИЗМА

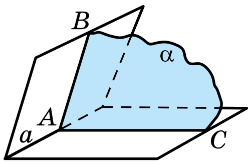
У цьому параграфі пригадаємо вже відоме нам з 10 класу поняття *двогранного кута* та розглянемо *многогранний кут*.

1. Двогранні та многогранні кути

Двогранним кутом **називають фігуру, яка утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.**



Мал. 1.1



Мал. 1.2

На малюнку 1.1 зображено двогранний кут. Півплощини, що утворюють двогранний кут, називають *гранями*, а пряму, що їх обмежує, – *ребром двогранного кута*.

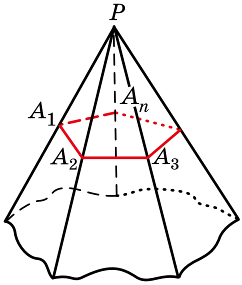
У повсякденному житті нам часто трапляються предмети, що мають форму двогранного кута. Прикладами таких предметів є відкритий або частково відкритий ноутбук, дві суміжні стіни кімнати, двоскатний дах будівлі тощо.

Площина α, що перпендикулярна до ребра a двогранного кута, перетинає грані двогранного кута по променях AB і AC (мал. 1.2). Кут BAC називають *лінійним кутом двогранного кута*. Двогранний кут має безліч лінійних кутів. Оскільки всі вони суміщаються паралельним перенесенням, то є рівними між собою.

Градусною мірою двогранного кута **називають градусну міру його лінійного кута.**

Зазвичай замість «градусна міра двогранного кута дорівнює...» кажуть «двогранний кут дорівнює...».

У геометрії розглядають також і *многогранні кути*.



Мал. 1.3

Нехай $A_1A_2...A_n$ – довільний плоский многокутник, а точка P не належить площині цього многокутника. ***Многогранним*** **(n-гранним)** ***кутом*** **називають множину всіх променів з початком у точці P, що перетинають даний многокутник** (мал. 1.3).

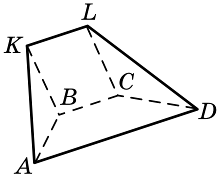
Точку P називають *вершиною*, промені PA_1, PA_2, ..., PA_n – *ребрами*, а плоскі кути A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 – *гранями многогранного кута*.

2. Многогранники

У попередніх класах ми вже розглядали прямокутні паралелепіпеди, куби й піраміди. Усі вказані тіла є прикладами многогранників.

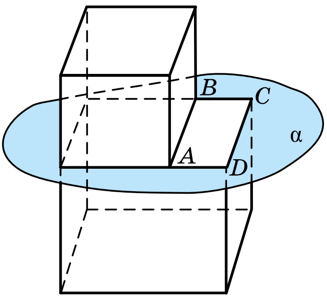
Многогранником **називають тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників.**

На малюнку 1.4 зображено многогранник, поверхня якого складається з трапецій $ABCD$ і $AKLD$, трикутників ABK і CLD та паралелограма $BKLC$. Многокутники, які обмежують многогранник, називають *гранями*, сторони цих многокутників – *ребрами*, а кінці ребер – *вершинами многогранника*. Гранями многогранника, зображеного на малюнку 1.4, є многокутники $ABCD$, $AKLD$, ABK, CLD, $BKLC$, ребрами – відрізки AB, BC, CD, DA, BK, CL, AK, KL і LD, вершинами – точки A, B, C, D, K і L.



Мал. 1.4

Многогранники бувають *опуклі* і *неопуклі*. Многогранник називають опуклим, якщо він лежить по один бік від площини кожної з його граней. На малюнку 1.4 зображено опуклий многогранник. Зауважимо, що всі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. На малюнку 1.5 зображено неопуклий многогранник, оскільки площина α, якій належить грань $ABCD$ цього многогранника, розбиває многогранник на дві частини.

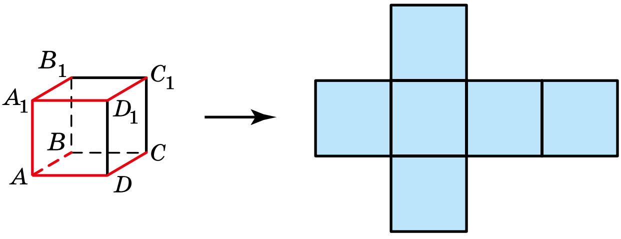


Мал. 1.5

Усі многогранники, які ми розглядали раніше, є опуклими.

Якщо поверхню многогранника розрізати по деяких його ребрах і розгорнути в площину однієї з його граней, то отримаємо *розгортку* даного многогранника.

Наприклад, якщо куб розрізати по ребрах AB, CD, A_1B_1, C_1D_1, AD, AA_1, A_1D_1 (мал. 1.6), то отримаємо його розгортку.



Мал. 1.6

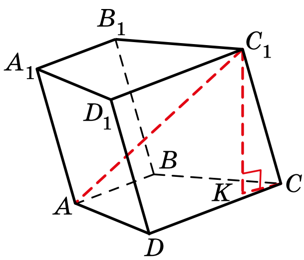
Площа поверхні многогранника – це сума площ усіх його граней. Площа поверхні многогранника дорівнює площі його розгортки.

У шкільному курсі геометрії розглядатимемо найпростіші многогранники: призми і піраміди.

3. Призма

Одним з найпростіших многогранників є *призма*. З деякими видами призм (прямокутним паралелепіпедом і кубом) ви ознайомилися ще в початковій школі. Призмою також є кузов вантажівки, шестигранний олівець, коробка з-під офісного паперу тощо.

Призмою **називають многогранник, у якого дві грані між собою рівні і лежать у паралельних площинах (їх називають *основами призми*), а всі інші грані – паралелограми (їх називають *бічними гранями призми*).**



Мал. 1.7

На малюнку 1.7 зображено призму, основами якої є чотирикутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Призму прийнято називати за назвою її основ, наприклад, на малюнку 1.7 зображено призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сторони бічних граней призми, які не належать основам, називають *бічними ребрами призми*.

На малюнку 1.7 паралелограми AA_1D_1D, ABB_1A_1, BB_1C_1C і CC_1D_1D – бічні грані призми; AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 – бічні ребра призми. Зрозуміло, що *всі бічні ребра призми паралельні і рівні між собою*.

Призму називають *n*-кутною, якщо її основою є *n*-кутник.

На малюнку 1.7 зображено чотирикутну призму.

Перпендикуляр, проведений з деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають *висотою призми*.

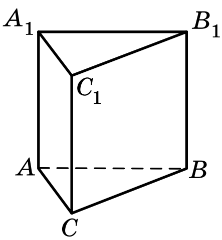
На малюнку 1.7 відрізок C_1K – висота призми.

Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не лежать в одній грані, називають *діагоналлю призми*.

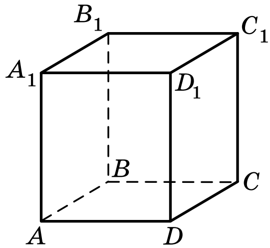
На малюнку 1.7 відрізок C_1A – діагональ призми.

Зауважимо, що під поняттям діагоналі, як і під поняттям відрізка, матимемо на увазі як відрізок, що є діагоналлю, так і довжину цього відрізка. Тому замість «*довжина діагоналі дорівнює 4 см*» будемо казати «*діагональ дорівнює 4 см*». Так само використовують і поняття висоти, бічного ребра, сторони основи тощо, оскільки всі вони є відрізками.

Призму називають *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до її основ, в іншому випадку призму називають *похилою*.



Мал. 1.8



Мал. 1.9

На малюнку 1.7 зображено похилу чотирикутну призму, а на малюнку 1.8 – пряму трикутну призму. Зрозуміло, що *бічні грані прямої призми – прямокутники, а висота прямої призми дорівнює її бічному ребру*.

***Пряму* призму називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник.**

На малюнку 1.9 зображено правильну чотирикутну призму. У правильній призмі всі бічні грані – рівні прямокутники.

***Площею повної поверхні призми* називають суму площ усіх її граней, а *площею бічної поверхні призми* – суму площ її бічних граней.**

Площу повної поверхні призми $S_{\text{повн}}$ можна записати через площі її бічної поверхні $S_{\text{біч}}$ і її основи $S_{\text{осн}}$ формулою:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Т е о р е м а (про площу бічної поверхні прямої призми). **Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи P на висоту призми, тобто на довжину її бічного ребра l:**

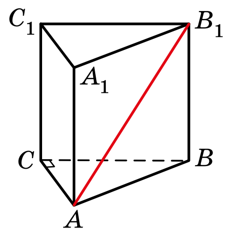
$$S_{\text{біч}} = Pl.$$

Д о в е д е н н я. Нехай a_1, a_2, ..., a_n – сторони основи, а l – довжина бічного ребра прямої призми. Враховуючи, що всі бічні грані – прямокутники, одна сторона яких дорівнює відповідно a_1, a_2, ..., a_n, а друга – є однаковою для всіх і дорівнює l, маємо:

$$S_{\text{біч}} = a_1 l + a_2 l + \ldots + a_n l = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)l = Pl,$$

оскільки $P = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ – периметр основи. ■

Задача 1. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Висота призми дорівнює 12 см. Знайдіть діагональ тієї грані призми, яка містить гіпотенузу трикутника.



Мал. 1.10

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана призма (мал. 1.10), $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle ACB = 90°$, $BB_1 = 12$ см. Знайдемо довжину діагоналі AB_1.

1) Із $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$):

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см)};$$

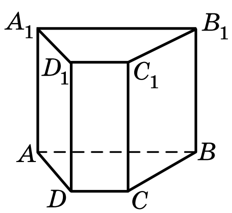
2) Із $\triangle ABB_1$ ($\angle B = 90°$):

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (см)}.$$

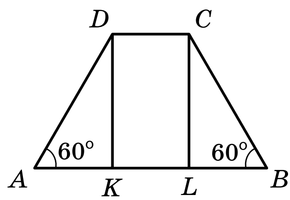
Відповідь. 13 см.

Задача 2. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, більша основа якої дорівнює 11 см, бічна сторона – 6 см, а кут при основі – 60°. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює меншій основі трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – дана призма (мал. 1.11), $AB = 11$ см, $AD = BC = 6$ см, $\angle A = 60°$. Знайдемо бічну поверхню призми: $S_{\text{біч}} = Pl = (AB + DC + 2BC) \cdot BB_1$.



Мал. 1.11



Мал. 1.12

1) Розглянемо трапецію $ABCD$, що є основою призми (мал. 1.12), проведемо в ній висоти DK і CL. Оскільки $AD = BC$, то $\angle A = \angle B = 60°$ і $AK = BL$.

2) Із $\triangle ADK$ ($\angle K = 90°$): $\cos A = \dfrac{AK}{AD}$, тоді $AK = AD\cos A =$ $= 6\cos 60° = 3$ (см). Оскільки $BL = AK$, то $BL = 3$ см.

3) Оскільки $KDCL$ – прямокутник, то $DC = KL =$ $= AB - 2AK = 11 - 2 \cdot 3 = 5$ (см).

4) За умовою $BB_1 = DC$, тому $BB_1 = 5$ см.

5) $S_{біч} = (AB + DC + 2BC) \cdot BB_1 = (11 + 5 + 2 \cdot 6) \cdot 5 =$ $= 140$ (см²).

Відповідь. 140 см².

Задача 3. Бічне ребро похилої призми дорівнює 16 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту призми.

Розв'язання. У цій задачі несуттєво, який саме многокутник є основою призми, тому використаємо малюнок 1.7. Тоді за умовою $CC_1 = 16$ см, C_1K – висота призми, кут нахилу ребра CC_1 до площини основи дорівнює 60°.

1) Оскільки $C_1K \perp (ABC)$, C_1C – похила до (ABC), CK – її проєкція, то $\angle C_1CK$ – кут нахилу бічного ребра до площини основи, отже, $\angle C_1CK = 60°$.

2) Із $\triangle CC_1K$ ($\angle K = 90°$): $\sin C = \dfrac{C_1K}{CC_1}$, тоді

$$C_1K = CC_1 \cdot \sin C = CC_1 \cdot \sin 60° = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

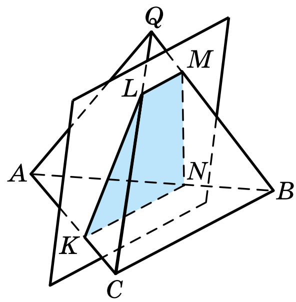
Відповідь. $8\sqrt{3}$ см.

4. Поняття перерізу многогранника

В умовах багатьох геометричних задач використовують поняття перерізу многогранника. Тож для розв'язування таких задач треба навчитися будувати *переріз многогранника* площиною. У 10 класі ми вже дізналися, як побудувати перерізи деяких многранників, зокрема прямокутного паралелепіпеда і піраміди.

Нагадаємо, що *січною площиною многогранника* називають будь-яку площину, по обидва боки якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинає грані многогранника по відрізках. Многокутник, сторонами якого є ці відрізки, називають *перерізом многогранника*.

Наприклад, на малюнку 1.13 чотирикутник $KLMN$ є перерізом трикутної піраміди $QABC$.



Мал. 1.13

Зауважимо, що січна площина може бути задана одним із відомих нам способів: трьома точками, що не лежать на одній прямій, або прямою і точкою, що їй не належить, або двома прямими, що перетинаються.

Нагадаємо, що для побудови перерізів можна використовувати метод слідів або метод внутрішнього проєкціювання, а також використовувати властивості паралельних прямих і площин.

Далі розглянемо деякі перерізи призми.

5. Побудова перерізу призми

Переріз призми, який проходить через два бічних ребра, що не лежать в одній грані, називають *діагональним перерізом призми*.

На малюнку 1.14 чотирикутник AA_1C_1C – діагональний переріз прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Цей переріз є прямокутником, одна зі сторін якого – діагональ основи AC, а інша – бічне ребро AA_1. У похилій призмі діагональним перерізом є паралелограм.

У задачах, пов'язаних із перерізом многогранника, може ставитися вимога знайти певні властивості цього перерізу, його площу або периметр тощо.

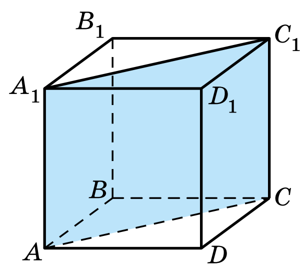
Задача 4. Основою прямої призми є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60°. Бічне ребро призми дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу діагонального перерізу призми, одна зі сторін якого є більшою діагоналлю ромба.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – пряма призма (мал. 1.14), $CC_1 = \sqrt{3}$ см, $ABCD$ – ромб, $AB = 8$ см, $\angle A = 60°$, тому AC – більша діагональ ромба. Тоді AA_1C_1C – діагональний переріз, площу якого треба знайти. Оскільки AA_1C_1C – прямокутник, то $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot CC_1 = AC\sqrt{3}$ (см²). Знайдемо AC.

1) У ромбі $ABCD$:
$\angle D = 180° - 60° = 120°$.

2) Із $\triangle ADC$ за теоремою косинусів:
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos D =$
$= 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cos 120° = 3 \cdot 8^2$,
тоді $AC = 8\sqrt{3}$ (см).

3) Маємо:
$S_{AA_1C_1C} = AC\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24$ (см²).



Мал. 1.14

Відповідь. 24 см².

Часто в задачах розглядають перерізи призми, що проходять через сторону основи призми і перетинають бічні ребра призми.

Задача 5. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см. Через сторону основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут 30° і перетинає бічне ребро в його середині. Знайдіть площу повної поверхні призми.

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана правильна призма з основою ABC (мал. 1.15), $AB = 4$ см. Запишемо формулу для знаходження площі повної поверхні даної призми:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}} = Pl + 2S_{ABC} =$$

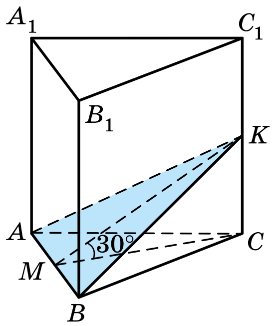
$$= 3AB \cdot CC_1 + 2 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 12 \cdot CC_1 + 8\sqrt{3}.$$

Отже, залишається знайти CC_1.

1) Побудуємо переріз. Нехай точка K – середина ребра CC_1. Через пряму AB і точку K проведемо площину. Перерізом призми є $\triangle ABK$.

2) У трикутнику ABC проведемо висоту і медіану CM, тоді

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$



Мал. 1.15

3) Проведемо відрізок KM. Оскільки $CC_1 \perp (ABC)$, CM – проєкція похилої KM на (ABC), $CM \perp AB$, то $KM \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри). Тоді $\angle KMC$ – кут, що утворює переріз із площиною основи. За умовою $\angle KMC = 30°$.

4) Із $\triangle KMC$ ($\angle C = 90°$): $\operatorname{tg} M = \dfrac{KC}{CM}$. Тоді

$$KC = CM \cdot \operatorname{tg} M = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 \text{ (см)}.$$

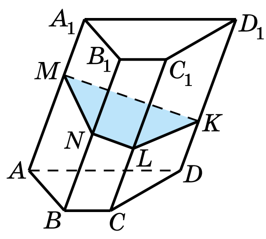
5) Оскільки K – середина CC_1, то $CC_1 = 2KC = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

6) $S_{\text{повн}} = 12 \cdot CC_1 + 8\sqrt{3} = 12 \cdot 4 + 8\sqrt{3} = 48 + 8\sqrt{3}$.

В і д п о в і д ь. $48 + 8\sqrt{3}$ см^2.

Розглянемо переріз похилої призми площиною, яка проходить через точку M бічного ребра AA_1 перпендикулярно до цього ребра та перетинає кожне з інших бічних ребер цієї призми (мал. 1.16).

Зрозуміло, що площина перерізу буде перпендикулярною до всіх інших бічних ребер призми. Такий переріз називають *перпендикулярним перерізом призми*. На малюнку 1.16 чотирикутник $MNLK$ – перпендикулярний переріз.

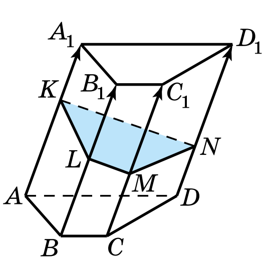


Мал. 1.16

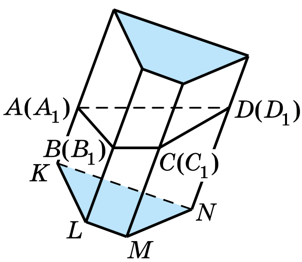
Перпендикулярний переріз прийнято розглядати лише в похилій призмі, оскільки, очевидно, що в прямій призмі він дорівнює многокутнику, який є основою призми.

Задача 6. Нехай у похилій призмі проведено перпендикулярний переріз. Довести, що бічну поверхню призми можна знайти за формулою $S_{\text{біч}} = P_{\text{пер}} \cdot l$, де $P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу призми, l – довжина бічного ребра (мал. 1.16).

Д о в е д е н н я. Розглянемо перпендикулярний переріз похилої призми $KLMN$ (мал. 1.16). Він ділить призму на дві частини. Застосуємо до нижньої частини призми паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ (мал. 1.17). Тоді основи $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ призми сумістяться, і ми отримаємо нову призму, основами якої буде перпендикулярний переріз призми (мал. 1.18), а бічні ребра дорівнюватимуть l. Очевидно, що отримана призма має таку саму площу бічної поверхні, як і початкова. Площа бічної поверхні отриманої призми дорівнює $P_{MNLK} \cdot l$, оскільки вона є прямою. Тому і бічна поверхня початкової призми теж дорівнює $P_{\text{пер}} \cdot l$, де $P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу, l – довжина бічного ребра. ■



Мал. 1.17



Мал. 1.18

А ще раніше...

Евклід означив призму як «геометричну фігуру, що міститься між двома рівними і паралельними площинами (основами), бічні грані якої – паралелограми».

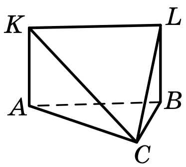
Зазначимо, що Евклід використовував термін «площина» і в сенсі необмеженості її в усіх напрямках, і в сенсі кінцевої, обмеженої її частини, зокрема грані.

У XVIII ст. англійський математик Брук Тейлор (1685–1731) дав призмі таке означення: «це многогранник, у якого всі грані, крім двох, паралельні одній прямій».

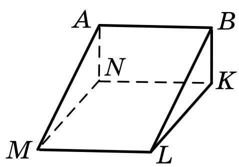
• Що називають двогранним кутом? • Що називають гранями двогранного кута, ребром двогранного кута? • Що називають многогранним кутом? • Що називають вершиною многогранного кута, ребрами многогранного кута, гранями многогранного кута? • Що називають многогранником? • Що називають гранями, ребрами, вершинами многогранника? • Який многогранник називають опуклим? • Як отримати розгортку многогранника? • Що називають призмою? • Що називають основами, бічними гранями та бічними ребрами призми? • Які властивості основ та бічних ребер призми вам відомі? • Яку призму називають *n*-кутною? • Що називають висотою призми? • Що таке діагональ призми? • Яку призму називають прямою, а яку – похилою? • Яку призму називають правильною? • Що розуміють під площею бічної поверхні призми; площею повної поверхні призми? • Сформулюйте та доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми. • Що розуміють під перерізом многогранника? • Який переріз призми називають діагональним?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1.1.** Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.19.



Мал. 1.19



Мал. 1.20

1.2. Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.20.

1.3. Скільки ребер і граней у чотирикутної призми?

1.4. Скільки ребер і граней у п’ятикутної призми?

1.5. Площа основи призми дорівнює 5 см^2, а площа бічної поверхні – 12 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.6. Площа бічної поверхні призми дорівнює 10 см^2, а площа основи – 4 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.7. Площа основи трикутної призми дорівнює 6 см^2, а площі її бічних граней – 9 см^2, 12 см^2 і 15 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.8. Площа основи чотирикутної призми дорівнює 16 см^2, а площа кожної з її бічних граней – 8 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.9. Основою прямої призми є чотирикутник, одна зі сторін якого дорівнює 4 см, кожна наступна на 1 см більша за попередню. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

1.10. Основою прямої призми є п'ятикутник, одна зі сторін якого дорівнює 20 см, а кожна наступна на 2 см менша за попередню. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.11. Основою прямої призми є квадрат зі стороною 3 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.12. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 2 см і 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см.

2 **1.13.** Яку найменшу кількість:
1) ребер може мати многогранник;
2) граней може мати многогранник?

1.14. Чи існує многогранник, у якого кількість вершин дорівнює кількості граней? У разі позитивної відповіді зобразіть його.

1.15. Визначте кількість вершин многокутника, що є основою призми, якщо ця призма має 11 граней.

1.16. Призма має 9 граней. Скільки сторін у многокутника, що є її основою?

1.17. Який многокутник є основою призми, якщо у призми 12 ребер?

1.18. Який многокутник є основою призми, якщо у призми 18 ребер?

1.19. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює 4 см, а діагональ бічної грані – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.20. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 5 см.

1.21. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 6 см і 5 см. Знайдіть висоту призми, якщо площа її повної поверхні дорівнює 126 см^2.

1.22. Площа повної поверхні правильної чотирикутної призми – 250 см^2. Знайдіть висоту призми, якщо сторона її основи дорівнює 5 см.

1.23. Бічне ребро похилої призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть висоту призми.

1.24. Висота похилої призми дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 60°.

1.25. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро – 3 см. Знайдіть площу діагонального перерізу цієї призми.

1.26. Знайдіть площу діагонального перерізу прямої чотирикутної призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см, а основою є прямокутник зі сторонами 8 см і 15 см.

1.27. Чи існує призма, у якої:
1) 99 ребер; 2) 101 ребро?

1.28. Чи існує призма, у якої:
1) 68 ребер; 2) 72 ребра?

1.29. Висота основи правильної трикутної призми дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а висота призми – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.30. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної призми, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а висота призми дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.31. Радіус кола, описаного навколо основи правильної трикутної призми, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а діагональ бічної грані утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.32. Висота основи правильної трикутної призми дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а діагональ бічної грані утворює кут 45° з висотою призми. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.33. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см, а висота призми – 10 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.34. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 29 см і 30 см, а висота призми – 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.35. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює $\sqrt{3}$ см, а діагональ призми утворює з висотою кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.36. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а діагональ призми утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.37. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а діагональ призми дорівнює 9 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.38. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а діагональ призми дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.39. Тумба для тварин, яку використовували дресирувальники під час своїх виступів на арені цирку, має форму правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 60 см, а висота – 50 см. Треба пофарбувати бічну поверхню цієї тумби. Скільки фарби використовувалося для фарбування її поверхні, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

1.40. Одним з елементів дитячого ігрового майданчика є правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 50 см, а висота – 40 см. Треба пофарбувати бічну поверхню цієї призми. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

1.41. У правильній чотирикутній призмі знайдіть відношення площі діагонального перерізу до площі бічної грані.

1.42. Основою прямої призми є ромб із діагоналями 9 см і 6 см. Знайдіть відношення площ діагональних перерізів цієї призми.

3 **1.43.** Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 81 см^2, а площа її бічної поверхні – 144 см^2. Знайдіть діагональ призми.

1.44. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см^2, а площа однієї з її бічних граней – 168 см^2. Знайдіть діагональ призми.

1.45. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина AB. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо відрізок C_1M утворює з площиною основи кут $60°$ і $C_1M = 6$ см.

1.46. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка N – середина BC. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо відрізок A_1N утворює з висотою призми кут $60°$ і $A_1N = 12$ см.

1.47. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка O – центр основи ABC, AM – медіана трикутника ABC,

$\sin \angle MC_1O = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Знайдіть $\angle C_1OM$.

1.48. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка O – центр основи ABC, AM – бісектриса трикутника ABC, $\angle C_1OM = 45°$. Знайдіть $\cos \angle OC_1M$.

1.49. Мале підприємство випускає подарункові коробки у вигляді прямої призми, основою якої є ромб із діагоналями 24 см і 10 см. Площа повної поверхні такої коробки дорівнює 760 см^2. Знайдіть висоту коробки.

1.50. Потрібно виготовити короб із кришкою для зберігання картоплі у формі прямої призми висотою 0,7 м. Основою короба є рівнобічна трапеція з основами 0,4 м і 0,6 м і бічною стороною 0,5 м. Скільки фанери знадобиться для виготовлення такого короба? Округліть відповідь до десятих м^2.

1.51. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка K – середина AB, M – середина A_1B_1. Відомо, що в чотирикутник CC_1MK можна вписати коло. Знайдіть кут C_1BC.

1.52. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка M – точка перетину медіан трикутника AC_1B_1, $MK \perp (ABC)$, $MK = \frac{AB}{3}$. Знайдіть $\angle C_1BC$.

1.53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма, $\angle DB_1C = 30°$. Знайдіть $\angle B_1AB$.

1.54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма, $\angle BDB_1 = 45°$. Знайдіть $\angle C_1AC$.

1.55. Перпендикулярним перерізом похилої трикутної призми є рівнобедрений трикутник з основою 8 см і площею 12 см^2. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює 144 см^2.

1.56. Перпендикулярним перерізом похилої трикутної призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і площею 12 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо бічне ребро призми дорівнює 7 см.

1.57. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо периметри двох її граней дорівнюють 30 см і 24 см. Скільки випадків треба розглянути?

1.58. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо периметри двох її граней дорівнюють 24 см і 36 см. Скільки випадків треба розглянути?

1.59. Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як $5:9:10$. Діагоналі двох менших її бічних граней дорівнюють 26 см і 30 см. Знайдіть периметр основи призми.

1.60. Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як $8:9:16$. Діагоналі двох більших її бічних граней дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть периметр основи призми.

1.61. Основа прямої призми – трикутник, дві сторони якого відносяться як $7:8$ та утворюють між собою кут $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо площа більшої бічної грані призми дорівнює 52 см^2.

1.62. Основою прямої призми є трикутник, дві сторони якого відносяться як $3\sqrt{2} : 1$ та утворюють між собою кут $135°$. Площа більшої бічної грані призми дорівнює 30 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.63. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма. Знайдіть кут між прямими:

1) AC і B_1E_1; 2) AD і B_1E_1; 3) AD і A_1C_1.

1.64. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма. Знайдіть кут між прямими:

1) AA_1 і DE; 2) AC і B_1D.

1.65. Більша діагональ правильної шестикутної призми утворює кут $45°$ із площиною основи. Знайдіть кут, який діагональ бічної грані утворює з площиною основи.

1.66. Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть кут, який утворює більша діагональ призми з площиною основи.

1.67. Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює більшій діагоналі основи. Знайдіть кут між діагоналями бічної грані цієї призми.

1.68. Основа призми – прямокутний трикутник, а дві бічні грані призми – квадрати. Знайдіть кут між діагоналями двох рівних між собою граней, якщо ці діагоналі виходять з однієї вершини.

1.69. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Через основу цього трикутника проведено переріз, який утворює кут $45°$ із площиною основи і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.

1.70. Основою прямої призми є рівносторонній трикутник зі стороною 2 дм. Через сторону цього трикутника проведено переріз, який утворює з площиною основи кут 60° і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.

1.71. Основою прямої призми є ромб із гострим кутом 60° і площею $8\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом 60°.

1.72. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ призми утворює з площиною основи кут 45°.

1.73. Основою прямої призми є прямокутник, сторони якого відносяться як $1:2$. Площа бічної поверхні призми дорівнює 90 см^2, а повної поверхні – 126 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.74. Основа прямої призми – ромб із гострим кутом 30°. Площа повної поверхні призми дорівнює 33 см^2, а площа її бічної поверхні – 24 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.75. Основою призми є рівносторонній трикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи призми ортогонально проєктується в центр нижньої основи. Знайдіть висоту призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.76. Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною 10 см. Вершина A_1 призми ортогонально проєктується в середину сторони AB. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо її висота дорівнює 12 см.

1.77. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 20 см, а основи – 41 см і 9 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює висоті основи.

1.78. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з меншою основою 5 см і бічними сторонами 12 см і 20 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює меншій діагоналі основи.

1.79. Знайдіть відношення площі найменшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми до площі її найбільшого діагонального перерізу.

1.80. Основою прямої призми є ромб із кутом 60°. Знайдіть відношення площі більшого діагонального перерізу призми до площі її меншого діагонального перерізу.

1.81. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а висота призми – 7 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро та меншу висоту основи призми.

1.82. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, а висота призми – 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро та середню за довжиною висоту основи.

1.83. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота – 1 см. Знайдіть площу перерізу AB_1C_1D.

1.84. У правильній шестикутній призмі площа основи дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2, а бічне ребро – 1 см. Знайдіть площу меншого діагонального перерізу призми.

1.85. Бічна грань правильної шестикутної призми є квадратом, периметр якого – 16 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через діагоналі паралельних бічних граней призми.

1.86. $ABCA_1B_1C_1$ – пряма трикутна призма, основа якої – рівнобедрений трикутник ABC, $\angle C = 90°$. Висота призми дорівнює 8 см, а діаметр кола, описаного навколо трикутника AB_1C, дорівнює 10 см. Знайдіть площу цього трикутника.

1.87. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а найбільша бічна грань рівновелика основі. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.88. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 19 см, 20 см і 37 см. Найменша бічна грань має площу вдвічі меншу за площу основи. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.89. На скільки частин поділяють простір площини всіх граней правильної чотирикутної призми?

1.90. На скільки частин поділяють простір площини всіх граней правильної трикутної призми?

4 **1.91.** Основою прямої призми є ромб з меншою діагоналлю завдовжки d, площа якого дорівнює Q. Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.92. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює $S\sqrt{3}$, а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.93. Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 17 см і 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

1.94. Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 8 см і 7 см. Знайдіть висоту призми.

1.95. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні. Їхнє спільне бічне ребро віддалене на 3 см і 4 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 120 см^2.

1.96. Ребро похилої трикутної призми дорівнює 8 см. Дві бічні грані призми взаємно перпендикулярні, а їхнє спільне бічне ребро віддалене на 5 см і 12 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.97. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма, у якої висота дорівнює 2 см, а площа перерізу AB_1C_1D дорівнює 24 см^2. Знайдіть сторону основи призми.

1.98. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло. Відношення площі діагонального перерізу призми до площі бічної грані, що містить бічну сторону основи, дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Знайдіть гострий кут трапеції.

1.99. Основою прямої призми є трапеція, у якої одна сторона дорівнює 23 см, а інші – по 13 см, бічне ребро призми дорівнює 16 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через паралельні сторони основ.

1.100. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло. Периметр трапеції дорівнює 32 см, а гострий кут – 30°. Знайдіть площу перерізу призми, проведеного через паралельні сторони основ, якщо висота призми дорівнює 3 см.

1.101. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основами 21 см та 11 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2. Знайдіть:
1) площу повної поверхні призми;
2) площу перерізу, проведеного через паралельні сторони основ.

1.102. Доведіть, що більша діагональ правильної шестикутної призми менша від подвоєної діагоналі бічної грані.

1.103. Діагоналі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють 9 см, $10\sqrt{2}$ см і 15 см. Основою призми є прямокутний трикутник. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.104. Основа прямої призми – прямокутний трикутник. Діагоналі бічних граней призми дорівнюють 4 см, 7 см і 8 см. Знайдіть висоту призми.

1.105. Сторони основи і бічне ребро прямої трикутної призми відносяться як $3:4:5:7$, а площа повної поверхні призми дорівнює 864 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.106. Діагоналі двох бічних граней прямої трикутної призми нахилені до площини основи під кутами 30° і 60°. Основою призми є рівнобедрений трикутник, периметр якого дорівнює 14 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.107. Площа бічної поверхні правильної шестикутної призми в 4 рази більша за площу її основи. Знайдіть кут, який утворює з площиною основи:

1) діагональ бічної грані;

2) менша діагональ призми.

1.108. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми відносяться як $5:29:30$, площа перпендикулярного перерізу дорівнює 288 см^2. Бічне ребро призми у 8 разів менше за периметр перпендикулярного перерізу. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.109. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 7 см, 15 см і 20 см, а бічне ребро втричі більше за радіус кола, вписаного у перпендикулярний переріз. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.110. П'єдестал має форму правильної призми, основою якої є многокутник з парною кількістю сторін. Проходячи повз п'єдестал, можна бачити то 3, то 4 бічні грані. Скільки бічних граней у цього п'єдесталу?

1.111. Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 17 см, а менша діагональ призми дорівнює 19 см. Знайдіть сторону основи призми.

1.112. У правильній шестикутній призмі кут між площиною основи та діагоналлю бічної грані на 15° більший за кут між цією площиною і меншою діагоналлю призми. Знайдіть ці кути.

1.113. Довжина кожного ребра правильної шестикутної призми дорівнює 2 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середини двох паралельних сторін основи під кутом 45° до площини основи.

1.114. Довжина кожного ребра правильної шестикутної призми дорівнює 3 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через найбільшу діагональ основи під кутом 60° до площини основи.

1.115. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 24 см², а площі її бічних граней – 16 см², 52 см² і 60 см². Знайдіть висоту призми.

1.116. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює a, а висота – H. Через сторону нижньої основи під кутом φ до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу (розгляньте два випадки).

Життєва математика

1.117. Друзі Сергій і Світлана ведуть здоровий спосіб життя, тому кілька разів на тиждень тренуються, бігаючи по колу, радіус якого 50 м. Сергій пробігає 8 кіл, а Світлана – 6 кіл. Швидкість бігу Сергія – 16 км/год, а Світлани – 14 км/год. Хто з друзів витрачає більше часу на тренування і на скільки (дати відповідь з точністю до секунди)?

1.118. Потрібно пофарбувати стелю у двох класах, один з яких квадратної форми зі стороною 4 м, а другий – прямокутної розміром 5×4 м. На 1 м² стелі витрачається 240 г фарби. Яку найменшу кількість банок фарби треба придбати, якщо фарбу продають у банках місткістю 2,5 кг.

Цікаві задачі для учнів неледачих

1.119. (*Київська міська олімпіада, 1991 р.*) У гострокутному трикутнику ABC на сторонах AB, BC і CA позначено точки C_1, A_1 і B_1 відповідно так, що відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в деякій точці O і $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$. Доведіть, що AA_1, BB_1 і CC_1 – висоти трикутника.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.120. Скільки ребер, граней, вершин має прямокутний паралелепіпед?

1.121. Знайдіть площу поверхні куба, ребро якого дорівнює:
1) 2 дм; 2) 7 см.

1.122. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють:
1) 3 см, 5 см і 7 см; 2) 1 дм, 8 см і 60 мм.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 1

1. З деякої точки до площини проведено перпендикуляр завдовжки 5 см та похилу завдовжки 12 см. Знайдіть проєкцію цієї похилої на площину.

А	Б	В	Г	Д
7 см	8 см	$\sqrt{119}$ см	13 см	інша відповідь

2. При якому значенні m вектори $\vec{a}(m;\ 1;\ -2)$ і $\vec{b}(4;\ 4;\ 2)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

3. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо дві його паралельні сторони збільшити на 10 %, а дві інші – на 20 %?

А	Б	В	Г	Д
на 10 %	на 15 %	на 20 %	на 30 %	на 32 %

4. MN – діаметр кола, а MK – хорда, яка дорівнює половині діаметра. Знайдіть величину кута KNM.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

5. Установіть відповідність між властивістю правильного многокутника (1–4) та кількістю його сторін (А–Д).

Властивість правильного многокутника

1 внутрішній кут дорівнює 150°

2 зовнішній кут дорівнює 36°

3 кількість діагоналей дорівнює 44

4 внутрішній кут на 100° більший за зовнішній

Кількість сторін

А 9

Б 10

В 11

Г 12

Д 13

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть тангенс меншого гострого кута цього трикутника.

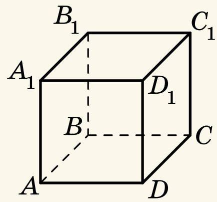
3. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а бічне ребро 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
160 см²	$40\sqrt{2}$ см²	$160\sqrt{2}$ см²	80 см²	інша відповідь

4. Укажіть градусну міру кута між векторами $\vec{a}(-1;\ 2;\ 4)$ і $\vec{b}(8;\ 0;\ 2)$.

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

5. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між заданими кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).



Задані кути

1 між прямими A_1B_1 і CD

2 між прямими A_1D і DC

3 між прямою C_1D і площиною ABC

4 між площинами A_1AC і BB_1D

Градусні міри

А 0°

Б 30°

В 45°

Г 60°

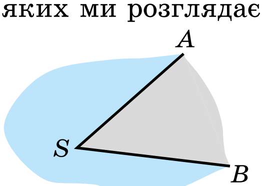
Д 90°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, відноситься до основи трикутника як 2 до 3, а бічна сторона трикутника дорівнює 20 см. Знайдіть периметр трикутника у см.

§ 5. ТРИГРАННИЙ КУТ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Серед усіх многогранних кутів у стереометрії найцікавішим для вивчення є тригранний кут, адже саме такі кути розглядають найчастіше в призмах і пірамідах, властивості яких ми розглядаємо в шкільному курсі стереометрії.



Мал. 5.1

Перш ніж почати вивчати тригранний кут і його властивості, нагадаємо поняття плоского кута.

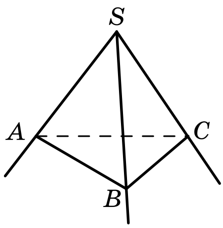
Розглянемо довільний кут ASB. Він ділить площину на дві області (мал. 5.1). Кожну із цих областей, об'єднану зі сторонами кута, називають *плоским кутом*.

Градусною мірою плоского кута вважають градусну міру відповідного кута, що є межею цього плоского кута. Надалі розглядатимемо лише плоскі кути, градусна міра яких менша за 180°.

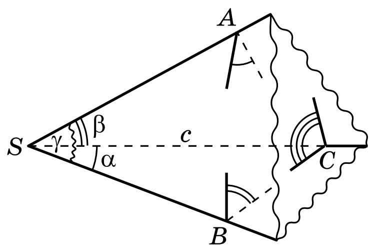
1. Тригранний кут та його елементи

Розглянемо трикутник ABC та точку S, що не належить площині цього трикутника (мал. 5.2). Фігуру, що складається з усіх променів, що мають спільний початок – точку S – та перетинають трикутник ABC, називають *тригранним кутом* і позначають $SABC$. Тригранний кут можна також означити як фігуру, що складається з трьох плоских кутів із спільною вершиною, які не лежать в одній площині.

Точку S (спільну вершину трьох плоских кутів) називають *вершиною тригранного кута*, промені SA, SB, SC – *ребрами тригранного кута*, кути ASB, ASC і BSC – *плоскими кутами тригранного кута*, які ще називають *гранями тригранного кута*. Двогранні кути, утворені гранями тригранного кута, називають *двогранними кутами тригранного кута*.



Мал. 5.2



Мал. 5.3

Двогранний кут тригранного кута, ребро якого SA, домовимося позначати $\hat{A}$, а протилежний йому плоский кут – α, дві інші пари відповідних кутів – $\hat{B}$ і β та $\hat{C}$ і γ (мал. 5.3).

Тригранний кут називають *прямим*, якщо всі його плоскі кути прямі, тобто $\alpha = \beta = \gamma = 90°$.

Тригранний кут, у якого всі плоскі кути між собою рівні та всі двогранні кути між собою рівні, називають *правильним*.

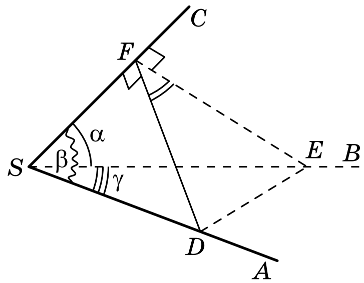
2. Перша теорема косинусів для тригранного кута

Розглянемо, як знайти двогранні кути тригранного кута, якщо відомо його плоскі кути.

Т Теорема 1 (перша теорема косинусів для тригранного кута). **Якщо α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а $\hat{C}$ – його двогранний кут, протилежний куту γ, то**

$$\cos\hat{C} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку випадок, коли кути α і β – гострі.



Мал. 5.4

1) Побудуємо лінійний кут DFE двогранного кута при ребрі SC (мал. 5.4). Тоді $SC \perp (DEF)$ і $\angle DFE = \hat{C}$.

2) За теоремою косинусів із $\triangle EFD$ отримаємо:

$$DE^2 = FE^2 + FD^2 - 2FE \cdot FD \cdot \cos \hat{C}, \qquad (1)$$

а із $\triangle ESD$ маємо:

$$DE^2 = SE^2 + SD^2 - 2SE \cdot SD \cdot \cos \gamma. \qquad (2)$$

3) Прирівнюючи праві частини отриманих рівностей, маємо:

$FE^2 + FD^2 - 2FE \cdot FD \cdot \cos \hat{C} = SE^2 + SD^2 - 2SE \cdot SD \cdot \cos \gamma.$

Тоді

$$2SE \cdot SD \cdot \cos \gamma = (SE^2 - FE^2) + (SD^2 - FD^2) + 2FE \cdot FD \cdot \cos \hat{C}.$$

4) Із $\triangle SEF$ ($\angle F = 90°$) і $\triangle SDF$ ($\angle F = 90°$): $SE^2 - FE^2 = SF^2$ і $SD^2 - FD^2 = SF^2$, тому

$$SE \cdot SD \cos \gamma = SF^2 + FE \cdot FD \cos \hat{C}.$$

5) Поділимо обидві частини останньої рівності на $SE \cdot SD$, отримаємо: $\cos \gamma = \dfrac{SF}{SE} \cdot \dfrac{SF}{SD} + \dfrac{FE}{SE} \cdot \dfrac{FD}{SD} \cos \hat{C}$.

6) Оскільки $\dfrac{SF}{SE} = \cos \alpha$, $\dfrac{FE}{SE} = \sin \alpha$, $\dfrac{SF}{SD} = \cos \beta$, $\dfrac{FD}{SD} = \sin \beta$,

то $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \hat{C}$.

Звідси $\cos \hat{C} = \dfrac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$.

Перевірте самостійно, що в усіх інших випадках вираз для знаходження $\cos \hat{C}$ буде таким самим. ■

Н **Н а с л і д о к. Будь-який плоский кут тригранного кута менший за суму двох інших плоских кутів.**

Доведення. Оскільки $\cos\hat{C} > -1$, $\sin\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$, то $\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta > -\sin\alpha\sin\beta$, тобто $\cos\gamma > \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, отже, $\cos\gamma > \cos(\alpha+\beta)$.

Звідси випливає, що $\gamma < \alpha + \beta$. ■

Доведений наслідок називають ще *нерівністю трикутника для тригранного кута*.

Задача 1. Довести, що сума всіх плоских кутів тригранного кута менша за 360°.

Доведення. 1) Продовжимо ребро AS тригранного кута з вершиною S за цю вершину (мал. 5.5).

2) Тоді в тригранному куті з ребрами SA_1, SB і SC маємо:

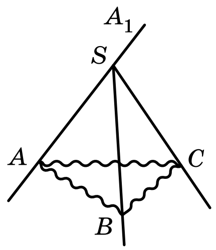
$\angle BSC < \angle BSA_1 + \angle A_1SC$.

3) Але $\angle BSA_1 = 180° - \angle BSA$,

$\angle A_1SC = 180° - \angle ASC$.

Тоді $\angle BSC < 360° - (\angle BSA + \angle ASC)$,

$\angle BSC + \angle BSA + \angle ASC < 360°$. ■



Мал. 5.5

Зауважимо, що в наслідку з теореми косинусів для тригранного кута та задачі 1 сформульовано *властивості тригранного кута*, тобто *необхідні* умови існування тригранного кута. Проте вони є і *достатніми* умовами (доведення цього факту не наводимо).

Таким чином,

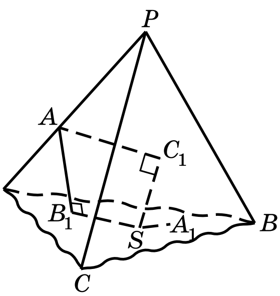
тригранний кут з плоскими кутами α, β, γ такими, що $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, існує тоді і тільки тоді, коли справджуються такі дві умови: $\alpha + \beta + \gamma < 360°$ і $\gamma < \alpha + \beta$.

Задача 2. Довести, що сума градусних мір двогранних кутів тригранного кута більша за 180°, але менша за 540°.

Доведення. 1) Нехай двогранні кути тригранного кута дорівнюють $\hat{A}$, $\hat{B}$ і $\hat{C}$. Візьмемо всередині цього кута деяку точку S і проведемо перпендикуляри SA_1, SB_1 і SC_1 до граней CPB, APC і BPA відповідно (мал. 5.6).

2) Позначимо $\angle B_1SC_1 = \alpha_1$, $\angle A_1SC_1 = \beta_1$, $\angle A_1SB_1 = \gamma_1$.

Тоді $\alpha_1 = 180° - \hat{A}$; $\beta_1 = 180° - \hat{B}$; $\gamma_1 = 180° - \hat{C}$.



Мал. 5.6

3) Маємо $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=540°-(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)$.

Але α_1, β_1 і γ_1 – плоскі кути тригранного кута з вершиною в точці S та гранями A_1SB_1, B_1SC_1 і C_1SA_1. Тому $0<\alpha_1+\beta_1+\gamma_1<360°$; $-360°<-(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)<0$.

4) Тому $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>540°-360°=180°$ і $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}<540°$. ■

3. Теорема про три косинуси

Ще одним важливим наслідком теореми косинусів для тригранного кута є *теорема про три косинуси*.

Т е о р е м а 2 (теорема про три косинуси). **Якщо двогранний кут тригранного кута прямий, то косинус протилежного плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його плоских кутів.**

Д о в е д е н н я. Нехай $\hat{C}=90°$, тоді, використовуючи теорему косинусів для тригранного кута, маємо:

$$\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=0. \text{ Отже, } \cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta.$$ ■

Задача 3. У тригранному куті два плоских кути дорівнюють по 45°, а двогранний кут між ними – прямий. Знайти третій плоский кут.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $\hat{C}=90°$, тоді

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta=\cos 45°\cos 45°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\gamma=60°$.

В і д п о в і д ь. 60°.

4. Друга теорема косинусів для тригранного кута

Розглянемо ще одну важливу теорему для тригранного кута. Почнемо з поняття *полярного кута*.

Нехай $PABC$ – деякий тригранний кут (мал. 5.6). Усередині кута позначимо точку S і проведемо перпендикуляри SA_1, SB_1 і SC_1 до граней CPB, APC і BPA відповідно. Кут $SA_1B_1C_1$, який ми отримали в такий спосіб, називають *полярним* даному тригранному куту $PABC$.

Зауважимо, що введення кута, полярного даному, не залежить від вибору точки P, оскільки кожного разу отримуватимемо тригранні кути, що суміщаються паралельним перенесенням.

Використовуючи ознаку перпендикулярності прямої і площини, легко довести, що

тригранний кут є полярним до свого полярного кута, тобто будь-який тригранний кут і кут, що йому полярний, — взаємно полярні кути.

Нехай α, β, γ – плоскі кути даного кута $PABC$, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ – його двогранні кути, α_1, β_1, γ_1 – плоскі кути полярного до $PABC$ кута, тобто кута $SA_1B_1C_1$, а $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ – двогранні кути кута $SA_1B_1C_1$. У задачі 2 ми показали, що

$$\alpha_1 + \hat{A} = \beta_1 + \hat{B} = \gamma_1 + \hat{C} = 180°.$$

Оскільки кут $PABC$, у свою чергу, полярний до кута $SA_1B_1C_1$, то відповідно матимемо

$$\alpha + \hat{A}_1 = \beta + \hat{B}_1 = \gamma + \hat{C}_1 = 180°.$$

Т е о р е м а 3 (друга теорема косинусів для тригранного кута). **Якщо $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ – двогранні кути тригранного кута, а γ – його плоский кут, протилежний куту $\hat{C}$, то**

$$\cos\gamma = \frac{\cos\hat{C} + \cos\hat{A}\cos\hat{B}}{\sin\hat{A}\sin\hat{B}}.$$

Д о в е д е н н я. 1) Розглянемо тригранний кут $PABC$ та полярний йому кут $SA_1B_1C_1$ (мал. 5.6). Використовуючи введені нами в цьому параграфі позначення та першу теорему косинусів для полярного кута $SA_1B_1C_1$, матимемо

$$\cos\hat{C}_1 = \frac{\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_1}{\sin\alpha_1\sin\beta_1}.$$

2) Але $\cos\hat{C}_1 = 180° - \gamma$, $\alpha_1 = 180° - \hat{A}$, $\beta_1 = 180° - \hat{B}$, $\gamma_1 = 180° - \hat{C}$. Тоді

$$\cos(180° - \gamma) = \frac{\cos(180° - \hat{C}) - \cos(180° - \hat{A})\cos(180° - \hat{B})}{\sin(180° - \hat{A})\sin(180° - \hat{B})},$$ тобто

$$-\cos\gamma = \frac{-\cos\hat{C} - \cos\hat{A}\cos\hat{B}}{\sin\hat{A}\sin\hat{B}}.$$

Отже, $\cos\gamma = \dfrac{\cos\hat{C} + \cos\hat{A}\cos\hat{B}}{\sin\hat{A}\sin\hat{B}}$. ■

Задача 4. Усі двогранні кути тригранного кута дорівнюють по 120°. Знайдіть плоскі кути двогранного кута.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Маємо (за теоремою 3):

$$\cos\gamma = \frac{\cos 120° + \cos 120°\cos 120°}{\sin 120°\sin 120°} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Тоді $\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2) Аналогічно $\alpha = \beta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

В і д п о в і д ь. Усі по $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

5. Теорема синусів для тригранного кута

Розглянемо ще одну властивість тригранного кута.

Т е о р е м а 4 (теорема синусів для тригранного кута). Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута, а $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — його двогранні кути, які відповідно протилежні цим плоским кутам, то

$$\frac{\sin\hat{A}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\hat{B}}{\sin\beta} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\gamma}.$$

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки $\cos\hat{C} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$, то

$$\sin^2\hat{C} = 1 - \cos^2\hat{C} = 1 - \left(\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)^2 =$$

$$= \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

(виконайте спрощення самостійно).

2) Тому $\frac{\sin^2\hat{C}}{\sin^2\gamma} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}$.

3) Аналогічно отримаємо:

$$\frac{\sin^2\hat{A}}{\sin^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma};$$

$$\frac{\sin^2\hat{B}}{\sin^2\beta} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}.$$

4) Тоді $\frac{\sin^2\hat{A}}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\hat{B}}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\hat{C}}{\sin^2\gamma}$.

Враховуючи, що $\sin\hat{A} > 0$, $\sin\alpha > 0$, $\sin\hat{B} > 0$, $\sin\beta > 0$, $\sin\hat{C} > 0$, $\sin\gamma > 0$, маємо: $\frac{\sin\hat{A}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\hat{B}}{\sin\beta} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\gamma}$. ■

6. Теорема про три синуси

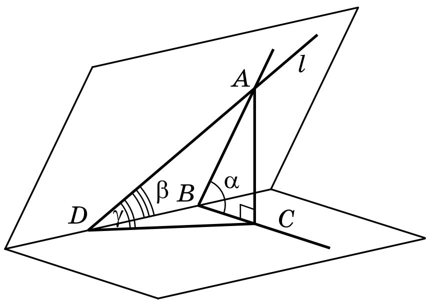
Розглянемо наслідок теореми синусів для тригранного кута, який прийнято називати *теоремою про три синуси*.

Т е о р е м а 5 (теорема про три синуси). **Якщо в одній із граней двогранного кута, градусна міра якого дорівнює α, проведено пряму l, яка перетинає ребро двогранного кута і утворює з ним кут β, а з іншою гранню — кут γ, то**

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta.$$

Д о в е д е н н я. 1) Нехай пряма l перетинає ребро двогранного кута в точці D, A – деяка точка прямої l (мал. 5.7).

2) Побудуємо лінійний кут двогранного кута. Для цього проведемо пряму AB, $AB \perp DB$, та пряму AC, $AC \perp (BCD)$. Тоді кут ABC – лінійний кут двогранного кута; $\angle ABC = \alpha$.



Мал. 5.7

3) За умовою $\angle ADB = \beta$.

4) Оскільки DC – проєкція прямої l на площину α, то кутом між прямою l і площиною α є кут ADC, за умовою $\angle ADC = \gamma$.

5) Розглянемо тригранний кут з вершиною в точці D та ребрами DA, DB і DC. Кути $ADB = \beta$ і $ADC = \gamma$ – його плоскі кути, $\angle ABC = \alpha$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі DB. Оскільки $AC \perp \alpha$, то за ознакою перпендикулярності площин $(ACD) \perp \alpha$. Тому лінійний кут двогранного кута при ребрі DC – прямий.

За теоремою синусів для тригранного кута маємо: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin 90^\circ}{\sin\beta}$, звідси $\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$. ■

• Що називають плоским кутом? • Яку фігуру називають тригранним кутом? • Що називають вершиною, ребрами, гранями тригранного кута? • Що називають двогранними кутами тригранного кута? • Який тригранний кут називають прямим? • Сформулюйте і доведіть першу теорему косинусів для тригранного кута та її наслідок. • Сформулюйте необхідну і достатню умову існування тригранного кута. • Сформулюйте і доведіть теорему про три косинуси. • Що розуміють під полярним кутом? • Назвіть властивості полярного кута. • Сформулюйте і доведіть другу теорему косинусів для тригранного кута. • Сформулюйте і доведіть теорему синусів для тригранного кута. • Сформулюйте і доведіть теорему про три синуси.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

5.1. (*Усно.*) Чи може сума плоских кутів тригранного кута дорівнювати:

1) 10°; 2) 100°; 3) 360°; 4) 400°?

5.2. Чи може сума плоских кутів тригранного кута дорівнювати:

1) 370°; 2) 360°; 3) 200°; 4) 70°?

5.3. Накресліть тригранний кут $DABR$, вершиною якого є точка D. Укажіть ребра та плоскі кути цього тригранного кута.

5.4. Накресліть тригранний кут $BCKL$, вершиною якого є точка B. Укажіть ребра та плоскі кути цього тригранного кута.

5.5. Чи можуть плоскі кути тригранного кута дорівнювати:

1) 120°, 120° і 119°; 2) 100°, 20° і 30°;
3) 121°, 120° і 119°; 4) 70°, 80° і 90°?

5.6. Чи можуть плоскі кути тригранного кута дорівнювати:

1) 70°, 80° і 150°; 2) 120°, 90° і 110°;
3) 130°, 120° і 140°; 4) 2°, 3° і 4°?

2

5.7. У яких межах може змінюватися плоский кут тригранного кута, якщо два інших плоских кути дорівнюють:

1) 50° і 85°; 2) 105° і 105°?

5.8. У яких межах може змінюватися плоский кут тригранного кута, якщо два інших плоских кути дорівнюють:

1) 25° і 70°; 2) 115° і 115°?

5.9. Чи існує тригранний кут, кожний двогранний кут якого дорівнює:

1) 30°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120°?

5.10. Чи існує тригранний кут, двогранні кути якого дорівнюють:
1) 20°, 80° і 80°; 2) 80°, 90° і 100°?

5.11. Доведіть, що коли двогранні кути тригранного кута рівні між собою, то кожний з них більший за 60°.

5.12. Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють по 60°. Знайдіть двогранні кути цього тригранного кута.

5.13. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Доведіть, що всі його двогранні кути також прямі.

5.14. Скільки площин симетрії має правильний тригранний кут?

5.15. У тригранного кута плоскі кути дорівнюють 60°, 45° і 45°. Знайдіть двогранний кут, який лежить проти більшого плоского кута.

5.16. У тригранного кута плоскі кути дорівнюють 60°, 120° і 120°. Знайдіть двогранний кут, який лежить проти меншого плоского кута.

5.17. У тригранного кута два плоских кути дорівнюють 45° і 60°, а двогранний кут між ними – прямий. Знайдіть третій плоский кут.

5.18. У тригранного кута два плоских кути дорівнюють 30° і 45°, а двогранний кут між ними – прямий. Знайдіть третій плоский кут.

5.19. У тригранного кута два плоских кути дорівнюють по 45°, а двогранний кут між ними – 60°. Знайдіть третій плоский кут.

5.20. У тригранного кута два плоских кути дорівнюють по 30°, а двогранний кут між ними – 60°. Знайдіть третій плоский кут.

5.21. У тригранного кута два двогранних кути дорівнюють по 120°, а один – 90°. Знайдіть плоский кут, що лежить проти меншого двогранного кута.

5.22. У тригранного кута два двогранних кути дорівнюють по 90°, а один – 120°. Знайдіть плоский кут, що лежить проти більшого двогранного кута.

3 **5.23.** Доведіть, що коли плоскі кути тригранного кута рівні між собою, то рівні між собою і двогранні кути.

5.24. На трьох ребрах прямого тригранного кута взято точки A, B і C. Доведіть, що ортогональна проєкція вершини цього кута на площину ABC збігається з точкою перетину висот трикутника ABC.

5.25. У тригранного кута $SABC$ $\angle ASB = 60°$, $\angle BSC = 30°$, $\angle CSA = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Знайдіть величину двогранного кута при ребрі SB.

5.26. У тригранного кута $SABC$ $\angle ASB = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle ASC = 60°$, $\angle ASB = 90°$. Знайдіть величину двогранного кута при ребрі SC.

5.27. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Знайдіть:
1) відстань від вершини кута до точки, що лежить усередині тригранного кута і яка віддалена від кожної грані на відстань a;
2) кут, що утворює з ребром тригранного кута промінь, який виходить з вершини цього кута й утворює з усіма ребрами даного кута рівні кути.

5.28. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Знайдіть:
1) відстань від вершини кута до точки, що лежить усередині тригранного кута і яка віддалена від кожного його ребра на відстань a;
2) кут, що утворює з гранню тригранного кута промінь, що виходить з вершини цього кута й утворює з усіма гранями цього тригранного кута рівні кути.

5.29. Усередині прямого тригранного кута взято точку A, яка віддалена від ребер цього кута на 8 см, 8 см і 10 см. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини тригранного кута.

5.30. Точка S – вершина прямого тригранного кута, а точка N міститься всередині цього кута. Проєкції відрізка SN на ребра тригранного кута дорівнюють 2 см, 6 см і 9 см. Знайдіть довжину відрізка SN.

5.31. Доведіть, що у тригранного кута проти рівних плоских кутів лежать рівні двогранні кути, а проти рівних двогранних кутів – рівні плоскі кути.

5.32. Доведіть, що якщо всі плоскі кути тригранного кута тупі, то й всі двогранні кути цього тригранного кута теж тупі.

5.33. Доведіть, що якщо всі двогранні кути тригранного кута гострі, то й усі плоскі кути цього тригранного кута гострі.

4 **5.34.** Розглянемо три площини, кожна з яких проходить через одне з ребер тригранного кута і бісектрису протилежного плоского кута при вершині даного тригранного кута. Доведіть, що ці площини мають спільну пряму (так звану *медіану тригранного кута*).

5.35. Відомо, що жодне з ребер тригранного кута не перпендикулярне до протилежної грані. Розглянемо три площини, кожна з яких проходить через одне з ребер тригранного кута перпендикулярно до протилежної грані. Доведіть, що ці площини мають спільну пряму.

5.36. Чи будь-який тригранний кут має переріз, що є правильним трикутником?

5.37. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює $60°$. Усередині кута взято точку, що віддалена від двох граней на відстань a, а від третьої грані – на відстань $3a$. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини тригранного кута.

5.38. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює $60°$. Усередині кута взято точку, що віддалена від усіх його граней на відстань a. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини тригранного кута.

5.39. Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють $60°$. Знайдіть кут, що утворює з площиною грані промінь, що проходить через вершину тригранного кута, лежить усередині кута й утворює рівні кути з усіма гранями тригранного кута.

5.40. Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють $60°$. Знайдіть кут, що утворює з ребром тригранного кута промінь, що виходить з вершини кута, лежить усередині кута й утворює рівні кути з усіма ребрами тригранного кута.

5.41. $SABC$ – тригранний кут, $\angle ASB = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle BSC = \varphi$ – його плоскі кути. Знайдіть кут нахилу прямої SA до площини ASB.

5.42. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює α. Знайдіть кут між його ребром і бісектрисою протилежного плоского кута.

5.43. Сума плоских кутів тригранного кута дорівнює $180°$. Доведіть, що сума косинусів його двогранних кутів дорівнює 1.

5.44. У тригранного кута два двогранних кути дорівнюють по $135°$, а їх спільний плоский кут – прямий. Знайдіть третій двогранний кут.

5.45. Доведіть, що коли всі двогранні кути тригранного кута між собою рівні, то й усі його плоскі кути теж між собою рівні.

5.46. Усі три плоских кути даного тригранного кута є гострими. Один з них дорівнює α. Двогранні кути, прилеглі до цього плоского кута, дорівнюють $\hat{B}$ і $\hat{C}$. Знайдіть два інших плоских кути.

5.47. Двогранні кути тригранного кута дорівнюють $90°$, $\hat{A}$ і $\hat{A}$. Знайдіть його плоскі кути.

Життєва математика

5.48. Як агроном за допомогою довгої мотузки, не вимірюючи кутів чотирикутної земельної ділянки, пересвідчується, що вона прямокутна?

5.49. Дитячий майданчик розміром $7{,}5 \times 4{,}5$ м потрібно застелити спеціальним покриттям, що складається з квадратних фрагментів зі стороною завдовжки 50 см. Скільки грошей буде витрачено на це, якщо один фрагмент покриття коштує 48 грн, а вартість додаткових матеріалів та роботи з укладання становить 40 % від вартості покриття?

Цікаві задачі для учнів неледачих

5.50. На відрізку AB як на діаметрі побудовано півколо. Як за допомогою лише лінійки без поділок провести пряму, перпендикулярну до даної прямої AB?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 5

1. Два із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як $2:3$. Знайдіть кут між прямими.

А	Б	В	Г	Д
70°	72°	78°	82°	108°

2. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гіпотенуза на 1 см більша за інший катет. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника.

А	Б	В	Г	Д
8 см	9 см	10 см	12 см	13 см

3. У рівнобедрений прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 12 см, вписано квадрат так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інші – на катетах. Знайдіть сторону квадрата.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
3 см	4 см	3,5 см	4,5 см	6 см

4. Трикутник ABC_1 є ортогональною проєкцією трикутника ABC на площину α. Площа трикутника ABC дорівнює 30 см^2, а трикутника ABC_1 – 15 см^2. Знайдіть кут між площинами ABC і α.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
30°	45°	60°	90°	120°

5. Встановіть відповідність між сторонами трикутника (1–4) та його видом (А–Д).

Сторони трикутника

1 3 см; 3 см; 3 см
2 3 см; 4 см; 5 см
3 4 см; 4 см; 5 см
4 2 см; 3 см; 4 см

Вид трикутника

А гострокутний різносторонній
Б рівнобедрений
В прямокутний
Г рівносторонній
Д тупокутний

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

6. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 20 см, а бічна сторона відноситься до основи як 2 : 1. Знайдіть (у см) радіус кола, вписаного в трикутник.

§ 6. ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ ТЕТРАЕДРА

Найпростішим, але водночас і найцікавішим з усіх многогранників, є тетраедр. Він, окрім вивчених вами раніше, має ще низку цікавих елементів та властивостей. Теорію, що описує елементи та властивості тетраедра, прийнято називати *геометрією тетраедра*. У цьому параграфі зупинимося на кількох основних моментах геометрії тетраедра.

1. Ортоцентричний тетраедр, його ознаки і властивості

На відміну від трикутника, у якого висоти або їх продовження завжди перетинаються в одній точці, висоти тетраедра не завжди перетина-

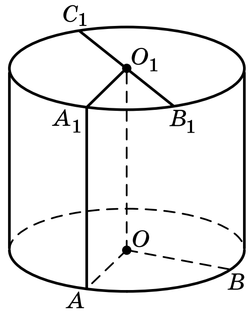
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 7

1 **1.** (*Усно*). Наведіть приклади предметів побуту, що є тілами обертання.

2. На малюнку 11.16 зображено циліндр, у якого O і O_1 – центри основ, AA_1 – твірна. Які з тверджень є правильними:

1) $OO_1 \perp AO$; 2) $OO_1 > AA_1$;
3) $OA = OB_1$; 4) $\angle O_1A_1A < 90°$;
5) $OB = \dfrac{C_1B_1}{2}$; 6) $OB \neq O_1C_1$;
7) $AA_1 \parallel OO_1$; 8) $AA_1 \perp AO$?



Мал. 11.16

3. Квадрат зі стороною 4 см обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть довжини радіуса, діаметра та висоти циліндра, що при цьому утворився.

4. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а діагональ осьового перерізу – 10 см. Знайдіть висоту циліндра.

2 **5.** Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, діагональ якого завдовжки $8\sqrt{2}$ см нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть:
1) радіус основи циліндра;
2) висоту циліндра;
3) площу осьового перерізу циліндра;
4) площу основи циліндра.

6. Довжина кола основи циліндра дорівнює 12π см, а діагональ осьового перерізу – 37 см. Знайдіть:
1) довжину висоти циліндра;
2) площу осьового перерізу циліндра.

7. Осьовий переріз циліндра – квадрат, площа якого – 16 см². Знайдіть площу основи циліндра.

8. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть радіус та висоту циліндра.

3 **9.** Діагональ осьового перерізу циліндра на 8 см більша за твірну і на 7 см більша за радіус циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

ЗМІСТ