

Розділ III. ФУНКЦІЯ



§ 1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЮ

1. Означення функції

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини відповідає єдине значення змінної y , то таку залежність називають **функціональною залежністю**, або **функцією**. При цьому змінну x називають **незалежною змінною** або **аргументом**, змінну y – **залежною змінною** або **функцією від аргумента**.

Найчастіше функції задають формулами (аналітичний метод задання), наприклад,

$$y = \frac{2x - 3}{7}; \quad y = 4x^2 - 5x + 1; \quad y = \sin x; \quad y = \log_3 x - 9 \text{ тощо.}$$

Приклад. Функцію задано формулою $y = \frac{10}{x+2}$. Знайти:

- 1) значення функції, що відповідає аргументу, що дорівнює -4 ;
- 2) значення аргумента, при якому значення функції дорівнює 2 .

Розв'язання. 1) За умовою $x = -4$, тоді маємо $y = \frac{10}{-4+2} ; y = -5$.

2) Щоб знайти x , при якому $y = 2$, розв'яжемо рівняння $2 = \frac{10}{x+2}$;
 $x+2 = 5 ; x = 3$. Отже, значення $y = 2$ функція набуває при $x = 3$.

2. Область визначення функції

Усі значення, які може набувати незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**. Область визначення функції ще називають **областю допустимих значень функції**. Область визначення функції позначають $D(y)$.

Приклад. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{4}{x-3}; \quad 2) y = \sqrt{x+2}.$$

Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі значення x , при яких має зміст дріб $\frac{4}{x-3}$.

Знайдемо ті значення x , при яких знаменник дробу дорівнює нулю: $x - 3 = 0, x = 3$. Отже, область визначення функції є всі чисел крім 3. Коротко це можна записати так: $x \neq 3$.

2) Область визначення функції – всі значення x , при яких має зміст вираз $\sqrt{x+2}$. Тому область визначення знаходимо з умови $x+2 \geq 0$, тобто $x \geq -2$. Можна записати: $D(y) = [-2; +\infty]$.

3. Область значень функції

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють **область значень функції**. Часто використовується термін «**множина значень функції**».

Область значення функції позначають $E(y)$.

Приклад. Знайдіть область визначення функції:

$$1) \ y = 2 - |x|; \quad 2) \ y = \sqrt{x^2 + 9} + 1.$$

Розв'язання. 1) Оскільки $|x| \geq 0$, то $-|x| \leq 0$, а тому $2 - |x| \leq 2$, тобто $y \leq 2$. Отже, проміжок $(-\infty; 2]$ – область значень функції, тобто $E(y) = (-\infty; 2]$.

2) Оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень x , то $x^2 + 9 \geq 9$ і $\sqrt{x^2 + 9} \geq 3$. Тому $\sqrt{x^2 + 9} + 1 \geq 4$, а, отже, $y \geq 4$. Маємо $E(y) = [4; +\infty)$.

4. Табличний спосіб задання функції

Задавати функцію можна і таблицею (*табличний спосіб задання функції*).

Приклад. Починаючи з восьмої години і до тринадцятої години, через кожну годину вимірювали атмосферний тиск і дані записували в таблицю:

Час t , год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p , мм рт.ст.	752	753	755	753	752	751

Таблиця задає відповідність між годинами t доби і атмосферним тиском p . Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає одне значення змінної p . У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p – залежною змінною. Область визначення функції утворюють числа: 8, 9, 10, 11, 12, 13 (числа першого рядка таблиці), а область значень 751, 752, 753, 755 (числа другого рядку таблиці).

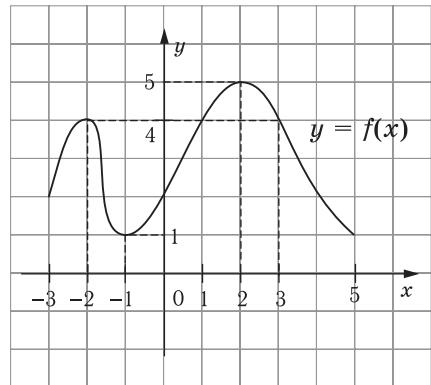
5. Графік функції. Графічний спосіб задання функції

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Надалі будемо розглядати графіки різних функцій: лінійних, квадратних, степеневих тощо.

Крім того графік також може задавати функцію. Такий спосіб задання функції називається *графічним*.

Приклад. На малюнку 73 функція $y = f(x)$ задана графіком на проміжку $[-3; 5]$. За допомогою графіка знайти:



мал. 73

1) значення функції, якщо $x = -1; x = 2$;

2) значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 4$.

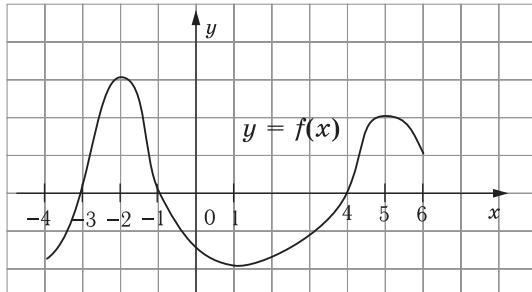
Розв'язання.

1) якщо $x = -1$, то $y = 1$; якщо $x = 2$, то $y = 5$;

2) якщо $y = 4$, то $x = -2$ або $x = 3$.

6. Нулі функції

Нуль функції – значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю.



мал. 74

Якщо функцію задано графічно, то кожен нуль функції – це абсциса перетину графіка функції з віссю Ox . Для функції $y = f(x)$, що задана графічно на малюнку 74 нулями є $x = -3$; $x = -1$ і $x = 4$.

Якщо функцію задано формулою $y = f(x)$, то її нулями є розв'язки рівняння $f(x) = 0$.

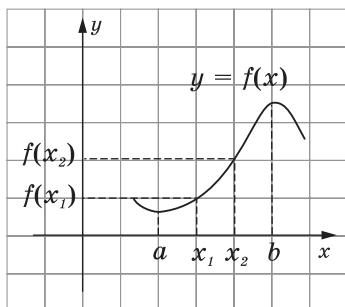
Приклад. Знайти нулі функції $y = x^2 - 5x + 6$.

Розв'язання. Маємо $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ – нулі функції.

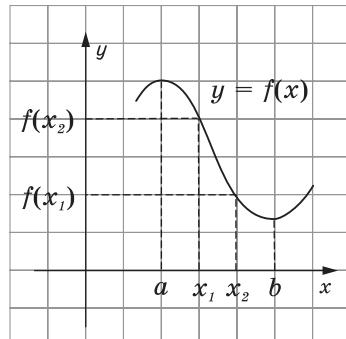
7. Проміжки зростання та спадання функції. Точки максимуму і точки мінімуму функції. Максимуми і мінімуми функції

Функцію $y = f(x)$ називають **зростаючою на деякому проміжку**, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

На малюнку 75 зображено графік функції $y = f(x)$, що зростає на проміжку $[a; b]$ (проміжок $[a; b]$ при цьому називається **проміжком зростання функції**). Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжка, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.



мал. 75



мал. 76

Функцію $y = f(x)$ називають **спадною на деякому проміжку**, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

На малюнку 76 зображені графік функції $y = f(x)$, що спадає на проміжку $[a; b]$ (проміжок $[a; b]$ при цьому називають **проміжком спадання функції**). Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжка, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$. Функція, котра на деякому проміжку тільки зроста або тільки спадає, називається **монотонною** на цьому проміжку.

Приклад 1. Для функції $y = f(x)$, заданої графічно на малюнку 76 проміжки зростання: $[-4; -2]$ і $[1; 5]$, проміжки спадання: $[-2; 1]$ і $[5; 6]$.

Точку x_0 називають **точкою максимуму функції** $y = f(x)$, якщо для всіх x із деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$. Значення функції в точці максимуму називають **максимумом функції**. На малюнку 75 $x = b$ – точка максимуму функції, а на малюнку 76 $x = a$ – точка максимуму функції.

Точку x_0 називають **точкою мінімуму функції** $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Значення функції в точці мінімуму називають **мінімумом функції**. На малюнку 68 $x = a$ – точка мінімуму функції, а на малюнку 76 $x = b$ – точка мінімуму функції.

Приклад 2. Для функції $y = f(x)$ (мал. 74), що задана графічно на проміжку $[-4; 6]$, $x = 1$ – точка мінімуму, це записують так: $x_{\min} = 1$; $y_{\min} = x(1) = -2$ – мінімум функції. У функції дві точки максимуму: $x = -2$ і $x = 5$. Це записують так: $x_{\max} = -2$, $x_{\max} = 5$, $y_{\max} = y(-2) = 3$, $y_{\max} = y(5) = 2$ – максимуми функції.

§ 2. ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

Функцію, що набуває кожне своє значення в єдиній точці області визначення, називають **оборотною**.

Наприклад, функція $y = 2x + 5$ є оборотною. Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною на множині R , оскільки, наприклад, значення 9 функція приймає в двох точках 3 і -3.

Нехай $y = f(x)$, де $f(x)$ – оборотна функція. Тоді для кожного значення y рівняння має єдиний розв'язок x : $x = g(y)$. Цю функцію $x = g(y)$ називають **оберненою** до функції $f(x)$. Оскільки в елементарній

математиці прийнято позначати аргумент через x , а функцію через y , то остаточно маємо: $y = g(x)$.

Приклад. Для функції $f(x) = 2x + 5$ знайти обернену.

Розв'язання. Маємо $y = 2x + 5$; виразимо x через y . $2x = y - 5$, $x = \frac{y - 5}{2}$. Позначимо аргумент через x , а функцію – через y і остаточно

отримаємо $y = \frac{x - 5}{2}$, або $g(x) = \frac{x - 5}{2}$.

Зрозуміло, що якщо g обернена до f , то й f – обернена до g . Такі дві функції називають *взаємно оберненими*.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Якщо функція зростаюча (спадна), то вона має обернену, яка також зростаюча (спадна).

§ 3. ПАРНІСТЬ І НЕПАРНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Область визначення функції $y = f(x)$ називають *симетричною відносно нуля*, якщо разом із кожним числом x область визначення містить також і число $(-x)$. Серед функцій із областю визначення, симетричною відносно нуля, розрізняють парні і непарні.

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Приклад 1. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^4$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки $f(x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, то функція парна.

Корисною є *властивість парної функції: графік будь-якої парної функції симетричний відносно осі Oy* .

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Приклад 2. Дослідити на парність функцію $f(x) = \frac{10}{-x}$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки $f(-x) = \frac{10}{x} = -f(x)$, то функція непарна.

Корисною є *властивість непарної функції: графік будь-якої непарної функції симетричний відносно початку координат*.

З даних означенень випливає, що у випадку несиметричності області визначення функції відносно нуля ця функція не може бути ні парною, ні непарною.

Приклад 3. Дослідити на парність функцію $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Область визначення не симетрична відносно нуля, оскільки значення $x = -2$ належить області визначення, а значення $x = 2$ – не належить. Тому функція ні парна, ні непарна.

Приклад 4. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^2 - x$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Для кожного x $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x = -(-x^2 - x)$. Оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, то функція ні парна, ні непарна.

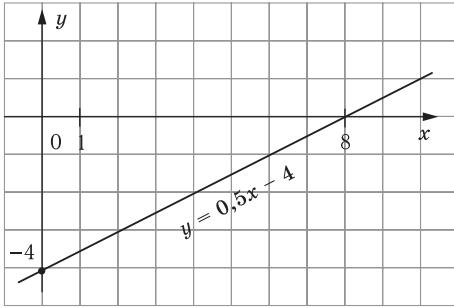
§ 4. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

1. Означення та графік лінійної функції

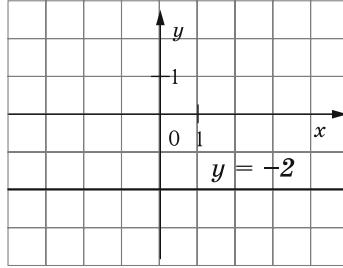
Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x – незалежна змінна, k і b – деякі числа.

Приклади лінійних функцій:

$$y = 2x - 5; \quad y = -\frac{1}{3}x; \quad y = 4; \quad y = 0,7x - 2 \text{ тощо.}$$



мал. 77



мал. 78

Графіком будь-якої лінійної функції є пряма, тому для побудови такого графіка достатньо мати дві його точки. При цьому число k називається **кутовим коефіцієнтом прямої**.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = 0,5x - 4$.

Розв'язання. Складемо таблицю для двох яких-небудь значень аргумента.

x	0	8
y	-4	0

Позначимо ці точки на координатній площині (мал. 77) та проведемо через них пряму. Отримали графік функції $y = 0,5x - 4$.

Якщо $k = 0$, то формула $y = kx + b$ набуває вигляду $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Лінійна функція, задана формулою $y = b$, набуває одного й того самого значення при будь-якому x .

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = -2$.

Розв'язання. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y , що дорівнює -2 . Графіком функції є пряма, що утворена точками з координатами $(x; -2)$ де x – будь-яке число. Позначимо будь-які дві точки з ординатами -2 (наприклад, $(-4; -2)$ і $(3; -2)$) і проведемо через них пряму (мал. 78). Ця пряма є графіком функції $y = -2$. Зауважимо, що вона паралельна осі Ox .

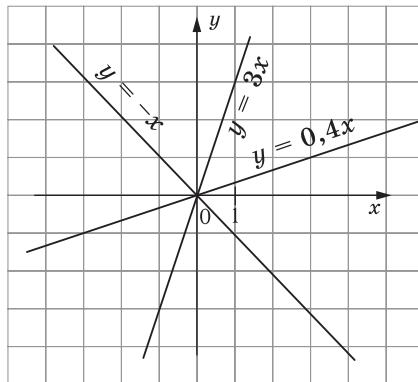
В загалі, щоб побудувати графік функції $y = b$, досить позначити на осі Oy точку з координатами $(0; b)$ та провести через цю точку пряму, паралельну до осі Ox .

2. Пряма пропорційність

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – число відмінне від нуля, називають **прямою пропорційністю**.

Зауважимо, що *графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат, причому якщо $k > 0$, то пряма розташована у I та III координатних квадрантах, а якщо $k < 0$, то пряма розташована у II та IV координатних квадрантах*.

На малюнку 79 зображені графіки функцій $y = 3x$; $y = -x$ і $y = 0,4x$.



мал. 79

3. Властивості лінійної функції

Систематизуємо дані про властивості лінійної функції у наступній таблиці:

№	Властивості	$y = kx + b$			
		$k > 0$	$k < 0$	$k = 0, b > 0$	$k = 0, b < 0$
1	Область визначення	R	R	R	R
2	Нулі функції	$x = -\frac{b}{k}$	$x = -\frac{b}{k}$	—	—
3	$y > 0$	$x > -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$	$x \in R$	—
4	$y < 0$	$x < -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$	—	$x \in R$
5	Зростає на проміжку	$(-\infty; \infty)$	—	Функція є сталою	
6	Спадає на проміжку	—	$(-\infty; \infty)$	Функція є сталою	
7	Найбільше значення функції	—	—	b	b
8	Найменше значення функції	—	—	b	b
9	Область значень	R	R	$y = b$	$y = b$
10	Парність, непарність	Якщо $b \neq 0$, то ні парна, ні непарна, якщо $b = 0$, то непарна		Парна	

Контрольний тест № 1

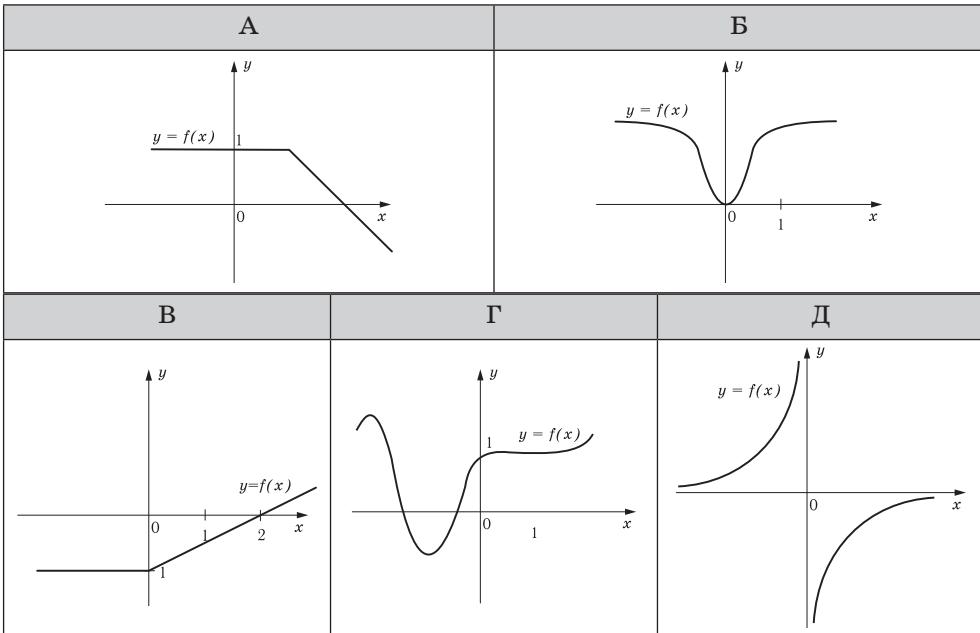
1. Для якої з поданих функцій область визначення є множина $(-\infty; 2]$?

A	B	V	G	D
$y = \sqrt{x - 2}$	$y = x - 2$	$y = 2 - x$	$y = \sqrt{2 - x}$	$y = \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$

2. Знайти область значень функції: $y = x^2 - 1$.

A	B	V	G	D
$[1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 1)$	$[-1; +\infty)$	$(-1; +\infty)$

3. Для якої з функцій $y = f(x)$, графіки яких подано, виконується умова $f(0) = -1$.



4. Знайти нулі функції: $y = x^2 + 2x - 3$.

А	Б	В	Г	Д
$-1; 3$	$1; -3$	1	-3	функція не має нулів

5. Для функції $y = 4x - 8$ знайти обернену.

А	Б	В	Г	Д
$y = 4x - 8$	$y = 8x - 4$	$y = 4x + 8$	$y = \frac{x - 8}{4}$	$y = \frac{x + 8}{4}$

6. Серед запропонованих функцій вказати непарну.

А	Б	В	Г	Д
$y = x \sin x$	$y = x + \sin x$	$y = x^4$	$y = x^3 + 1$	$y = \frac{x^5 + x}{x}$

7. Яка з запропонованих функцій є зростаючою на множині дійсних чисел?

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 7$	$y = -7x + 2$	$y = 2$	$y = 2x - 7$	$y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

8. Графіком функції є пряма лінія, паралельна осі абсцис, що проходить через точку $(-2; 3)$. Задати функцію формулою.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$x = -2x + 3$

9. Пряму пропорційність задано формулою $y = \frac{5}{6}x$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 30?

А	Б	В	Г	Д
0	36	-36	30	25

10. Знайти координати точок перетину графіка функції $y = 1,5x + 6$ з осями координат.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 6); (4; 0)$	$(0; 6)$	$(6; 0); (0; -4)$	$(0; 6); (-4; 0)$	$(0; 4); (0; -6)$

11. Знайти найменше значення функції: $y = \sqrt{4 - x^2} - 3$.

12. Знайти ординату точки перетину графіків функцій $y = 3x - 5$ і $y = x - 7$.

§ 5. ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$, ІХ ГРАФІКИ

ТА ВЛАСТИВОСТІ

1. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік

Оберненою пропорційністю називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де x – незалежна змінна, k – деяке число, відмінне від нуля.

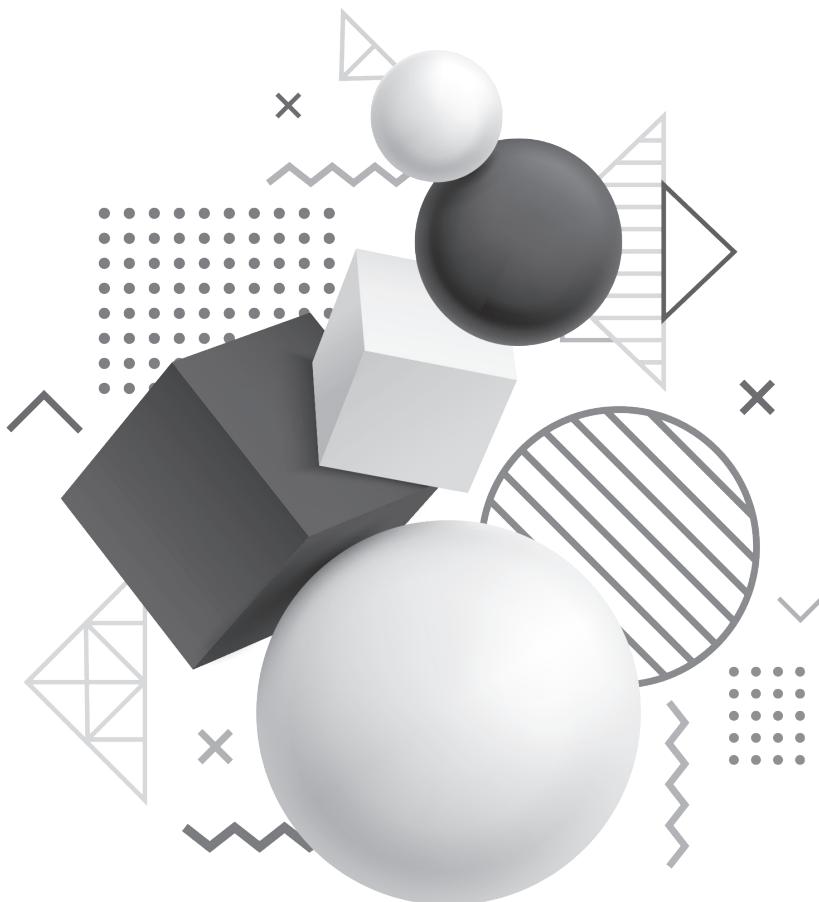
Областю допустимих значень функції $y = \frac{k}{x}$ є множина всіх дійсних чисел, крім нуля. Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ є крива, що складається з двох віток – *гіпербола*, причому, якщо $k > 0$, то її вітки розташовано у I та III координатних чвертях, а якщо $k < 0$, то у II та IV координатних чвертях.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$.

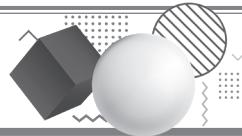
Розв'язання. Складемо таблицю значень функції $y = \frac{6}{x}$ для кількох значень аргумента.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

ГЕОМЕТРІЯ



Розділ I. ПЛАНІМЕТРІЯ



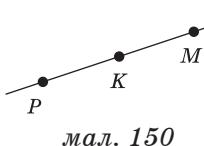
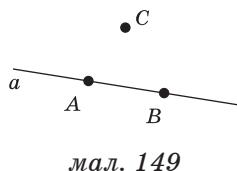
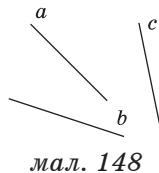
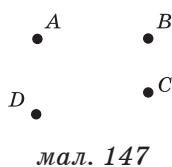
§ 1. НАЙПРОСТИШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1. Точка і пряма

Геометрія – це наука про властивості геометричних фігур.

Планіметрія – частина геометрії, яка вивчає властивості геометричних фігур на площині.

*Площа*на є однією з основних геометричних фігур. Уявлення про частину площини дає поверхня столу, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має меж і не має товщини.



Основними геометричними фігурами на площині є *точка* і *пряма*. Точки позначають великими латинськими буквами $A, B, C, D\dots$ (мал. 147). Прямі можна проводити за допомогою лінійки (мал. 148). При цьому зображують частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають малими латинськими буквами a, b, c .

На малюнку 149 зображені пряма a і точки A, B, C . Точки A і B лежать на прямій a ; говорять також, що точки A і B належать прямій a , або що пряма a проходить через точки A і B . Точка C не лежить на прямій a ; інакше кажучи, точка C не належить прямій a , або пряма a не проходить через точку C .

Якщо *б* не була прямі, існували б точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

Для зручності замість слів «точка A належить прямій a » користуються записом $A \in a$, а замість слів «точка C не належить прямій a » – записом $C \notin a$.

Зауважимо, що через точки A і B не можна провести іншу пряму, яка не збігається з прямою a .

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Пряму, на якій позначені дві точки, наприклад, A і B , можна позначити двома буквами: AB або BA .

На малюнку 149 точка C не належить прямій AB , це записують так $C \notin AB$. Говорять також, що *точки A, B і C не лежать на одній прямій* (не належать одній прямій).

На малюнку 150 точки P, K і M лежать на одній прямій, причому точка K лежить між точками P і M .

З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

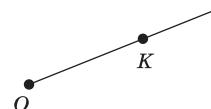
2. Промінь

Проведемо пряму і позначимо на ній точку A (мал. 151). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожну з яких разом із точкою A називають **променем**, що виходить з точки A . Точка A називається **початком** кожного з променів. Промені позначаються двома величими латинськими буквами, перша з яких початком променя, а друга – якась інша точка на промені (наприклад промінь OK на малюнку 152).

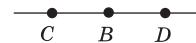
Різні промені однієї прямої, що мають спільний початок, називають **доповняльними**. На малюнку 153 промінь BC доповняльний для променя BD , і навпаки, промінь BD є доповняльним для променя BC .



мал. 151



мал. 152



мал. 153

3. Відрізок

Відрізком називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом з цими точками. Ці точки називають кінцями відрізу.

На малюнку 154 зображено відрізок AB ; точки A і B – його кінці.



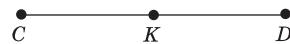
мал. 154

На малюнку 155 точка K належить відрізку CD , а точка L не належить відрізку CD .



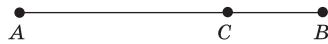
Для вимірювання відрізків необхідно мати **одиничний відрізок** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є, наприклад, 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.



мал. 155

На малюнку 156 зображено відрізок AB . Точка C ділить відрізок AB на два відрізки AC і CB . При цьому $AB = AC + CB$.



мал. 156

Довжина відрізу дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

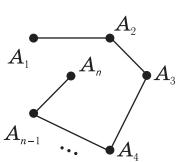
Довжину відрізу називають також **відстанню між його кінцями**.

Приклад. Точка C належить відрізку AB , довжина якого дорівнює 7,5 см. Визначте довжини відрізків AC і CB , якщо BC коротший за AC у 2 рази.

Розв'язання (мал. 156). Нехай довжина відрізу $BC = x$ см, тоді $AC = 2x$ см. Оскільки $AC + CB = AB$, то маємо рівняння $2x + x = 7,5$. Розв'язуємо його: $3x = 7,5$; $x = 2,5$. Отже, $BC = 2,5$ см; $AC = 2 \cdot 2,5 = 5$ см.

Точку відрізу, яка ділить його навпіл, тобто на два рівні відрізки, називають **серединою відрізу**.

4. Ламана



мал. 157

Ламаною $A_1A_2A_3\dots A_n$ називають фігуру, яка складається з точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ і відрізків $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, що їх сполучають (мал. 157). Точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ називають **вершинами ламаної**, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, – **ланками ламаної**.

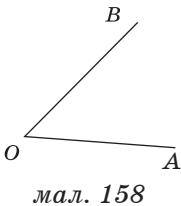
Довжиною ламаної називають суму довжин її ланок.

Довжина ламаної не менша за довжину відрізка, що сполучає її кінці.

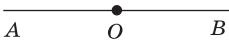
5. Кут

Кут – це геометрична фігура, яка складається з точки і двох променів, що виходять із цієї точки.

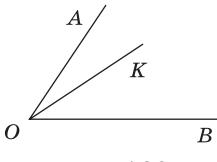
Промені називають **сторонами кута**, а їх спільний початок – **вершиною кута**.



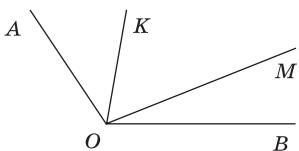
мал. 158



мал. 159



мал. 160



мал. 161

На малюнку 158 зображеного кута з вершиною O і сторонами OA та OB . Такий кут можна назвати кутом O , або кутом AOB , або кутом BOA . У другому та третьому варіантах назви кута буквa O , що позначає вершину кута, ставиться посередині. Слово «кут» можна замінити знаком \angle , записавши кут так: $\angle O$, або $\angle AOB$, або $\angle BOA$.

Розгорнутий кут – це кут, сторони якого є доповнняльними променями (мал. 159).

Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° .

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

На малюнку 160 промінь OK ділить AOB на два кути: BOK і KOA . Тоді

$$\angle AOB = \angle AOK + \angle BOK.$$

Приклад. Промені OK і OM проходять між сторонами кута AOB , який дорівнює 120° .

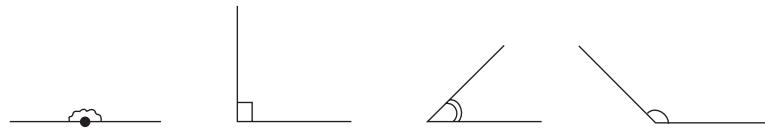
$\angle KOB = 80^\circ$, $\angle AOM = 90^\circ$. Знайти градусну міру кута KOM .

Розв'язання (мал. 161).

$$\angle MOB = \angle AOB - \angle AOM = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

Тоді $\angle KOM = \angle KOB - \angle MOB = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$.

Розрізняють наступні види кутів. Кут називають **розгорнутим**, якщо його градусна міра дорівнює 180° , **прямим** – якщо його градусна міра дорівнює 90° , **гострим** – якщо він менший від прямого, **тупим** – якщо він більший від прямого, але менший від розгорнутого (мал. 162).



Розгорнутий

Прямий

Гострий

Тупий

мал. 162

6. Бісектриса кута

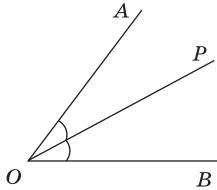
Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить його на два рівні кути.

На малюнку 163 промінь OP – бісектриса кута AOB .

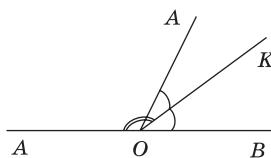
Приклад. Який кут утворює бісектриса кута 50° з продовженням однієї з його сторін?

Розв'язання (мал. 164). $\angle KOB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

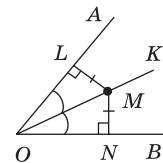
Тоді, $\angle MOK = \angle MOB - \angle KOB = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.



мал. 163



мал. 164



мал. 165

Властивість бісектриси кута: будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута (дивіться § 4).

На малюнку 165 промінь OK – бісектриса кута AOB ; $M \in OK$, ML і MN – відстані від точки M до сторін кута. Тоді $ML = MN$.

§ 2. АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Аксіоми планіметрії – це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як вихідні положення.

Нагадаємо деякі вже відомі нам аксіоми.

- I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.
- II. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
- III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° .

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Ще одна важлива аксіома – аксіома паралельності прямих або аксіома Евкліда буде сформульована в § 5.

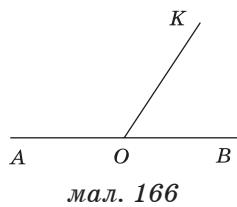
§ 3. СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

1. Суміжні кути, їх властивості

Два кути називають суміжними, якщо одна сторона в них спільна, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 166 кути AOK і KOB – суміжні.

Властивість суміжних кутів: *сума суміжних кутів дорівнює 180°* .



Приклад. Знайти міри суміжних кутів, якщо один з них на 50° більший за інший.

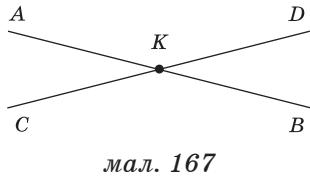
Розв'язання (мал. 166). Нехай $\angle KOB = x$, тоді $\angle AOK = x + 50^\circ$.

За властивістю суміжних кутів $x + x + 50^\circ = 180^\circ$;
 $2x = 130^\circ$; $x = 65^\circ$.

Отже, $\angle KOB = 65^\circ$, $\angle AOK = 115^\circ$.

2. Вертикальні кути, їх властивості

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями до сторін іншого.



На малюнку 167 прямі AB і CD перетинаються в точці K . Кути AKC і DKB – вертикальні, кути AKD і CKB теж вертикальні.

Властивість вертикальних кутів: *вертикальні кути рівні*.

Приклад. Градусні міри двох з чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як $2:7$. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.

Розв'язання (мал. 167). Кути, описані в умові, мають різні градусні міри і тому є не вертикальними, а суміжними.

Позначимо $\angle AKC = 2x$; $\angle AKD = 7x$.

За властивістю суміжних кутів $2x + 7x = 180^\circ$; $9x = 180^\circ$; $x = 20^\circ$.

Отже, $\angle AKC = \angle BKD = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, $\angle AKD = \angle BKC = 7 \cdot 20^\circ = 140^\circ$.

3. Кут між прямими

Кутом між прямими, що перетинаються, називають менший із кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

Наприклад, кут між прямими AB і CD із прикладу попереднього пункту дорівнює 40° . Зрозуміло, що кут між прямими не перевищує 90° .

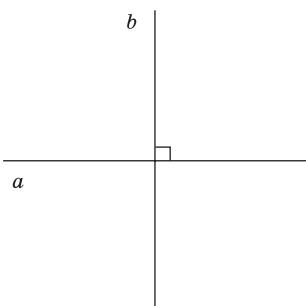
§ 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА, СЕРЕДИННИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

1. Перпендикулярні прямі

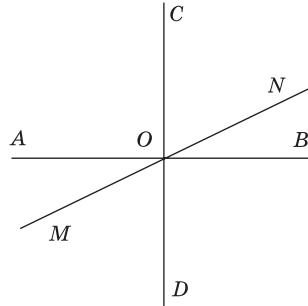
Дві прямі називають перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На малюнку 168 прямі a і b перетинаються в точці O , причому $a \perp b$ (мал. 168). Перпендикулярність прямих можна записати за допомогою знака « \perp ». Запис $a \perp b$ означає, що прямі a і b перпендикулярні.

Приклад. Прямі AB , CD і MN перетинаються в точці O , причому $AB \perp CD$ (мал. 169). Знайдіть $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 155^\circ$.



мал. 168



мал. 169

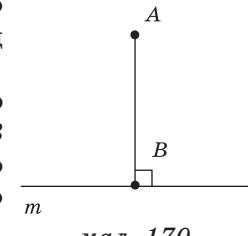
Розв'язання. $\angle MOD = \angle MOB - \angle DOB = 155^\circ - 90^\circ = 65^\circ$. Кути CON і MOD вертикальні. Тому $\angle CON = \angle MOD = 65^\circ$.

2. Перпендикуляр і похила, відстань від точки до прямої

Перпендикуляром до прямої, проведеним із даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один із кінців якого – дана точка, а інший – точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають *відстанню від точки до прямої*.

На малюнку 170 з точки A до прямої m проведено перпендикуляр AB . Точку B називають *основою перпендикуляра*. Довжина відрізка AB – відстань від точки A до прямої m .

Нехай AB – перпендикуляр, проведений з точки A до прямої m , а K – довільна точка прямої m , відмінна від B (мал. 171). Відрізок AK називають *похилою*, проведеною з точки A до прямої m . Точку K називають *основою похилої*, а відрізок BK – *проекцією похилої*.



мал. 170

Розглянемо властивості перпендикуляра і похилого.

1. Перпендикуляр, проведений із даної точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної з цієї самої точки до прямої.

На малюнку 171: $AB < AK$.

2. Якщо дві похилі, проведенні до прямої з деякої точки, рівні, то рівні їх проекції.

На малюнку 172: $AB \perp m$, $AL = AK$. Тому $LB = BK$.

3. Якщо дві похилі, проведенні до прямої з даної точки, мають рівні проекції, то вони рівні.

На малюнку 172: $AB \perp m$, $LB = BK$. Тому $AL = AK$.

4. Якщо з даної точки проведено до прямої дві похилі, то більша похила має більшу проекцію на цю пряму.

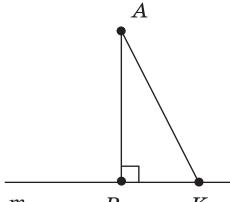
На малюнку 173: $AB \perp m$, $AN > AM$. Тому $BN > MB$.

5. Якщо з даної точки проведено до прямої дві похилі, то більшою з них є та, яка має більшу проекцію на дану пряму.

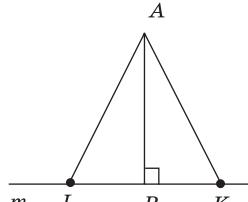
На малюнку 173: $AB \perp m$, $BN > MB$. Тому $AN > AM$.

Приклад. З однієї точки до прямої проведено дві рівні похилі. Проекція однієї з похилих дорівнює 5 см. Знайти відстань між основами похилих.

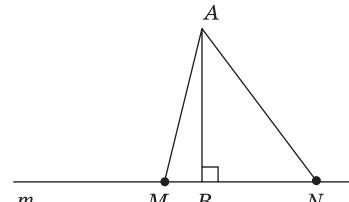
Розв'язання (мал. 172). За умовою, $AL = AK$ і $LB = 5$ см. Тоді $BK = LB = 5$ (см) і $LK = 5 + 5 = 10$ (см).



мал. 171



мал. 172



мал. 173

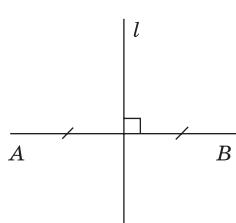
3. Серединний перпендикуляр

Серединним перпендикуляром до відрізка називають пряму, яка проходить через середину відрізка і перпендикулярна до нього. На малюнку 174 пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB .

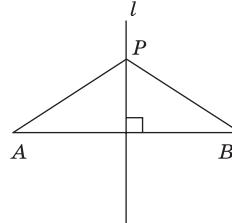
Властивість серединного перпендикуляра:

кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка (знаходиться на одинакових відстанях від них).

На малюнку 175 точка P – довільна точка серединного перпендикуляра до відрізка AB – прямої l . Тоді $PA = PB$.



мал. 174



мал. 175

§ 5. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. ОЗНАКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРІМИХ

1. Паралельні прямі

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

На малюнку 176 прямі a і b паралельні. Паралельність прямих записують за допомогою знака \parallel . Запис $a \parallel b$ означає, що прямі a і b паралельні.

Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає *основну властивість паралельних прямих*.

VIII. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Цю аксіому називають *аксіомою паралельності прямих* або *аксіомою Евкліда*.

2. Кути, утворені при перетині двох прямих січною

Пряму називають *січною* відносно прямих a і b , якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 177).

При перетині прямих a і b січною c утворилося вісім кутів, для зручності позначених цифрами на малюнку 177. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:

внутрішні односторонні кути: 4 і 5; 3 і 6;

внутрішні різносторонні кути: 4 і 6; 3 і 5;

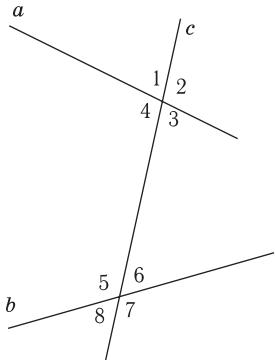
відповідні кути: 1 і 5; 2 і 6; 3 і 7; 4 і 8.

3. Ознаки паралельності прямих

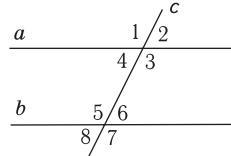
Ознака (у геометрії) – це теорема, що вказує умови, при виконанні яких можна стверджувати про певні властивості фігур, чи їх належність до певного класу.

Ознака паралельності прямих. Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

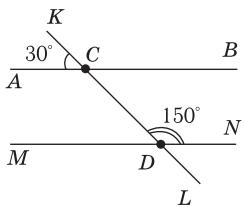
На малюнку 178: c – січна для a і b . Якщо $\angle 1 = \angle 5$ або $\angle 2 = \angle 6$ або $\angle 3 = \angle 7$ або $\angle 4 = \angle 8$, то $a \parallel b$.



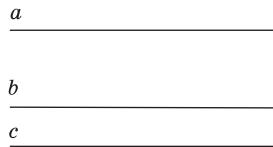
мал. 177



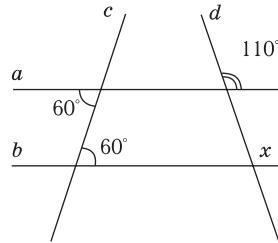
мал. 178



мал. 179



мал. 180



мал. 181

Наслідок 1. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

На малюнку 178: c – січна для a і b . Якщо $\angle 3 = \angle 5$ або $\angle 4 = \angle 6$, то $a \parallel b$.

Наслідок 2. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то прямі паралельні.

На малюнку 178: c – січна для a і b . Якщо $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ або $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$, то $a \parallel b$.

Приклад. Чи є паралельними прямі AB і MN на малюнку 179?

Розв'язання. $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні), $\angle BCD = 30^\circ$. Оскільки $30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$, то сума внутрішніх односторонніх кутів BCD і CDN дорівнює 180° . Тому, за наслідком 2, $AB \parallel MN$.

4. Властивості паралельних прямих

Розглянемо **властивості паралельних прямих**.

1. Дві прямі, кожна з яких паралельна до третьої прямої, паралельні одна до одної.

На малюнку 180: $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Тому $a \parallel c$.

2. Відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.

На малюнку 178: $a \parallel b$, c – січна. Тому $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$.

3. Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.

На малюнку 178: $a \parallel b$, c – січна. Тому $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$.

4. Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180° .

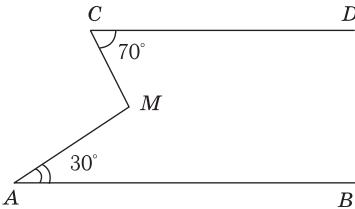
На малюнку 178: $a \parallel b$, c – січна. Тому $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$.

Приклад 1. Знайти градусну міру кута x на малюнку 181.

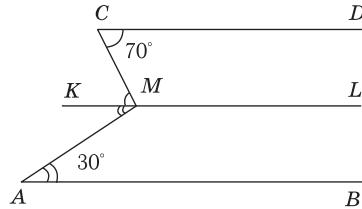
Розв'язання. Оскільки внутрішні односторонні кути, утворені при перетині січною c прямих a і b , рівні (обидва по 60°), то $a \parallel b$. Відповідні кути, утворені при перетині січною d паралельних прямих a і b , рівні. Тому $x = 110^\circ$.

Приклад 2. На малюнку 182 $AB \parallel CD$. Знайти градусну міру кута CMA .

Розв'язання. 1) проведемо через точку M пряму KL , паралельну до прямої AB (мал. 183). $\angle KMA = \angle MAB = 30^\circ$ (внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною AM паралельних прямих KL і AB).



мал. 182



мал. 183

2) За властивістю 1 паралельних прямих маємо $KL \parallel CD$.

3) $\angle KMC = \angle DCM = 70^\circ$ (внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною CM паралельних прямих KL і CD).

4) Тоді $\angle CMA = \angle CMK + \angle KMA = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$.

Контрольний тест № 1

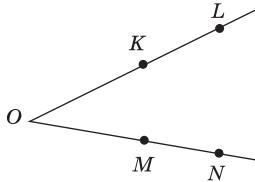
1. Точка K належить відрізку AB , довжина якого дорівнює 12 см. Відрізок KB у 3 рази коротший за відрізок AK . Знайти довжину відрізка AK .

А	Б	В	Г	Д
3 см	4 см	6 см	8 см	9 см

2. Промені OK і OL проходять між сторонами прямого кута AOB , $\angle AOL = 80^\circ$, $\angle BOK = 50^\circ$. Знайти градусну міру кута KOL .

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	40°	50°

3. Якою не може бути назва кута, зображеного на малюнку?



А	Б	В	Г	Д
$\angle KOM$	$\angle MOL$	$\angle KON$	$\angle LOK$	$\angle LOM$

4. Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін дорівнює 110° . Знайти градусну міру даного кута.

А	Б	В	Г	Д
70°	90°	110°	140°	інша відповідь

5. Один із суміжних кутів на 10° менший за інший. Знайти градусну міру меншого із суміжних кутів.

А	Б	В	Г	Д
85°	80°	75°	70°	65°

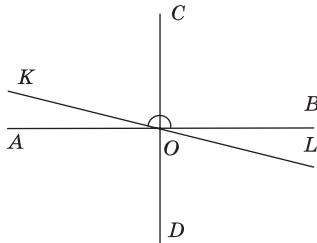
6. Величини двох із чотирьох кутів, що утворися при перетині двох прямих, відносяться як $4 : 5$. Знайти кут між прямими.

А	Б	В	Г	Д
70°	100°	90°	80°	85°

7. Чому дорівнює кут між бісектрисами вертикальних кутів?

А	Б	В	Г	Д
60°	90°	120°	180°	неможливо визначити

8. Прямі AB і CD перпендикулярні (малюнок) і перетинаються в точці O , $\angle BOK = 160^\circ$. Знайти градусну міру кута DOL .

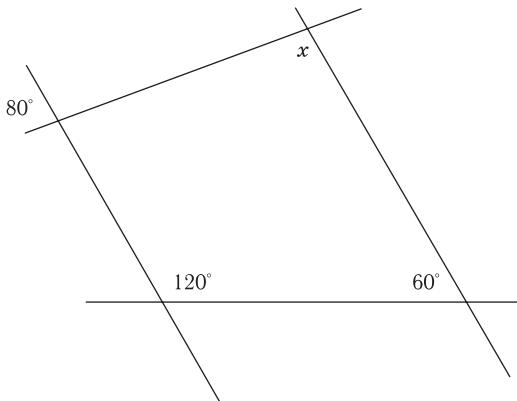


А	Б	В	Г	Д
70°	60°	50°	40°	інша відповідь

9. Один із кутів, які утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 40° . Якому значенню із запропонованих може дорівнювати один із решти сімі кутів?

А	Б	В	Г	Д
150°	140°	60°	50°	10°

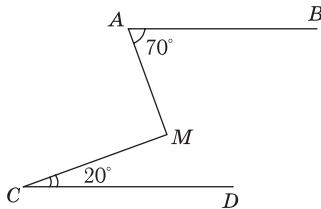
10. Знайти значення кута x за даними малюнка.



A	Б	В	Г	Д
60°	80°	100°	120°	70°

11. Точки A , B і C лежать на одній прямій, $AB = 7$ см, $BC = 5$ см. Якою найменшою (у см) може бути відстань між точками A і C ?

12. На малюнку прямі AB і CD паралельні. Знайти градусну міру кута AMC .

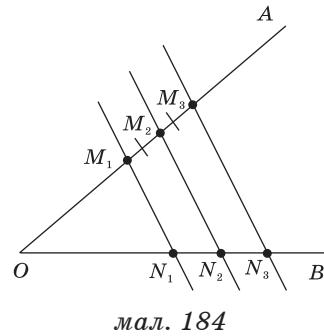


§ 6. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА, УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

1. Теорема Фалеса

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтінають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтінають рівні відрізки і на іншій його стороні.

На малюнку 184 прямі M_1N_1 , M_2N_2 і M_3N_3 попарно паралельні і $M_1M_2 = M_2M_3$. Тоді за теоремою Фалеса: $N_1N_2 = N_2N_3$.



мал. 184

Зміст



Передмова	3
-----------------	---

Алгебра і початки аналізу

Розділ I. ЧИСЛА І ВИРАЗИ	6
§1. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА	6
1. Натуральні числа	6
2. Звичайні дроби.....	6
3. Десяткові дроби	6
4. Додатні і від'ємні числа. Модуль числа	7
5. Цілі числа, раціональні числа, ірраціональні числа	8
6. Дійсні числа. Співвідношення між числовими множинами	8
§2. ПРАВИЛА ПОРІВНЯННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ	8
1. Порівняння натуральних чисел.....	8
2. Порівняння десяткових дробів	8
3. Порівняння звичайних дробів	8
4. Порівняння додатніх і від'ємних чисел	9
§3 . ПРАВИЛА ОКРУГЛЕННЯ ЦЛИХ ЧИСЕЛ І ДЕСЯТКОВИХ ДРОБІВ	9
1. Правила округлень натуральних чисел	9
2. Правила округлення десяткових дробів	9
§4. ПРАВИЛА ДІЙ З РАЦІОНАЛЬНИМИ ЧИСЛАМИ.....	9
1. Дії з десятковими дробами	9
2. Дії зі звичайними дробами	11
3. Дії із додатнimi та від'ємнимi числами	12
4. Властивості дій із дійсними числами	13
Контрольний тест № 1	13
§5. ПОДІЛЬНІСТЬ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ	15
1. Дільники і кратні.....	15
2. Ознаки подільності на 2; 3; 5; 9; 10.....	15
3. Прості і складені числа. Розкладання натурального числа на прості множники ..15	15
4. Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК).....	15
§6. ТОТОЖНІ ВИРАЗИ. ТОТОЖНІТЬ. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ.	16
1. Тотожні вирази. Тотожність	16
2. Тотожні перетворення виразів	16
§7. ВІДНОШЕННЯ ТА ПРОПОРЦІЙ	17
1. Відношення. Пропорція	17
2. Використання основної властивості пропорції при розв'язуванні рівнянь ..18	18
3. Прямо пропорційна залежність	18
§8. ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЕСЯТКОВОГО ДРОБУ У ЗВИЧАЙНИЙ ТА ЗВИЧАЙНОГО У ДЕСЯТКОВИЙ.....	19
1. Перетворення десяткового дробу у звичайний.....	19
2. Перетворення звичайного дробу у скінчений десятковий.....	19
3. Перетворення звичайного дробу у нескінчений періодичний десятковий дріб.. 19	19
4. Десяткове наближення звичайного дробу.	20
Контрольний тест № 2	20

§9. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АРИФМЕТИЧНИМИ СПОСОБАМИ	22
1. Найпростіші задачі на рух.....	22
2. Середня швидкість руху.....	22
3. Задачі на рух по річці.....	23
4. Задачі, пов'язані з рухом двох об'єктів.....	23
5. Задачі, пов'язані з вартістю товару	26
6. Задачі на роботу.....	26
7. Знаходження дробу від числа	27
8. Знаходження числа за його дробом	28
§10. ВІДСОТКИ.....	30
1. Означення відсотка.....	30
2. Знаходження відсотка від числа.....	30
3. Знаходження числа за значенням його відсотка.....	30
4. Відсоткове відношення двох чисел	30
5. Формула складних відсотків.....	31
Контрольний тест № 3	31
§11. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ	33
1. Означення степеня з натуральним показником	33
2. Властивості степеня з натуральним показником	33
§12. ОДНОЧЛЕН.....	34
1. Означення одночлена	34
2. Множення одночленів	34
3. Піднесення одночлена до степеня	34
§13. МНОГОЧЛЕН.....	34
1. Означення многочлена	34
2. Додавання і віднімання многочленів	35
3. Множення одночлена на многочлен	35
4. Множення многочленна на многочлен	35
§14. ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ.....	35
§15. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ	36
1. Винесення спільного множника за дужки	36
2. Спосіб групування	36
3. Використання формул скороченого множення	36
Контрольний тест № 4	36
§16. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ДРІБ	38
1. Означення алгебраїчного дробу	38
2. Область допустимих значень змінних	38
3. Основна властивість дробу	39
4. Скорочення дробу	39
5. Зведення дробу до нового знаменника.....	39
§17. ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ	
3 АЛГЕБРАЇЧНИМИ ДРОБАМИ	39
1. Додавання і віднімання дробів з одинаковими знаменниками	39
2. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками.....	40
3. Множення дробів.....	40
4. Піднесення дробу до степеня	40
5. Ділення дробів	41
§18. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ	41
§19. СТЕПІНЬ З ЦІЛІМ ПОКАЗНИКОМ.....	42
1. Означення степеня з цілим п Періодичність тригонометричних функцій	65

§29. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ	
ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО Й ТОГО САМОГО АРГУМЕНТУ	66
1. Тотожності, що пов'язують тригонометричні функції одного й того самого аргументу.....	66
2. Використання співвідношень між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу для обчислень	66
3. Використання співвідношень між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу для тотожних перетворень виразів	67
Контрольний тест № 8	67
§30. ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.....	69
1. Формули зведення	69
2. Застосування формул зведення для обчислень	70
3. Застосування формул зведення для тотожних перетворень виразів	70
§31. ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА НАСЛІДКИ З НИХ.....	71
1. Формули додавання	71
2. Формули подвійного і потрійного кута.....	72
3. Формули пониження степеня.....	73
4. Формули половинного кута	74
5. Формули перетворення суми і різниці однайменних тригонометричних функцій у добуток	74
Контрольний тест № 9	75
§32. ЛОГАРИФМ	77
1. Означення логарифма	77
2. Десятковий і натуральний логарифми	77
3. Властивості логарифмів.....	78
4. Тотожні перетворення виразів, що містять логарифми	79
Контрольний тест № 10	81
ЗРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ.....	83
Розділ II. РІВНЯННЯ И НЕРІВНОСТИ	
§1. РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ.....	96
1. Означення рівняння з однією змінною	96
2. Корінь (розв'язок) рівняння з однією змінною.....	96
3. Рівносильні рівняння.....	96
4. Властивості рівнянь	96
§2. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ, РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЛІНІЙНИХ.....	97
1. Лінійне рівняння.....	97
2. Рівняння, що зводяться до лінійних.....	97
§3. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ ..	98
1. Рівняння з двома змінними	98
2. Розв'язок рівняння з двома змінними.....	98
3. Рівносильні рівняння з двома змінними	98
4. Системи рівнянь з двома змінними.....	98
5. Означення рівносильних систем	99
§4. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	99
1. Лінійне рівняння з двома змінними.	99
2. Графік лінійного рівняння з двома змінними.	99
3. Графічний спосіб розв'язування систем.	100

4.	Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки.....	100
5.	Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання	101
	<i>Контрольний тест № 1</i>	102
§5.	КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ.	103
1.	Означення квадратного рівняння.	103
2.	Неповне квадратне рівняння.....	103
3.	Формули коренів квадратного рівняння.....	104
§6.	ТЕОРЕМА ВІСТА.	105
§7.	РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ.	106
1.	Дробові раціональні рівняння.....	106
2.	Метод розкладання многочлена на множники.	108
3.	Біквадратні рівняння.....	108
4.	Метод заміни змінних.....	108
	<i>Контрольний тест № 2</i>	109
§8.	КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН	111
1.	Означення квадратного тричлена	111
2.	Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.	111
§9.	РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ.	112
1.	Способ підстановки	112
2.	Способ додавання	112
3.	Заміна змінних	113
§10.	ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ	114
1.	Загальна схема.....	114
2.	Розв'язування текстових задач за допомогою лінійних рівнянь	114
3.	Розв'язування текстових задач за допомогою квадратних рівнянь	114
4.	Задачі на рух, що зводяться до дробових раціональних рівнянь	115
5.	Задачі на роботу, що зводяться до дробових раціональних рівнянь.....	116
§11.	ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ	117
1.	Загальна схема.....	117
2.	Розв'язування текстових задач за допомогою системи лінійних рівнянь.....	117
3.	Розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь другого степеня.	117
	<i>Контрольний тест № 3</i>	118
§12.	НЕРІВНОСТІ	120
1.	Означення нерівності з однією змінною.	120
2.	Розв'язок нерівності з однією змінною.....	120
3.	Рівносильні нерівності.	120
4.	Властивості нерівностей з однією змінною.	120
§13.	ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ.	120
1.	Розв'язування лінійних нерівностей.	120
2.	Розв'язування нерівностей, що зводяться до лінійних	121
§14.	СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	121
1.	Система нерівностей з однією змінною.....	121
2.	Загальна схема розв'язування систем нерівностей.....	122
3.	Розв'язування систем лінійних нерівностей.....	122
§15.	КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ.	123
1.	Означення квадратної нерівності.....	123
2.	Розв'язування квадратної нерівності.	123

§16. МЕТОД ІНТЕРВАЛІВ.....	125
§17. РІВНЯННЯ, ЩО МІСТЯТЬ ЗМІННУ ПІД ЗНАКОМ МОДУЛЯ	126
1. Рівняння виду $ f(x) = a$ де a – число.....	126
2. Рівняння виду $ f(x) = g(x)$	127
3. Рівняння виду $ f(x) = g(x) $	127
4. Рівняння, що містять декілька знаків модуля	127
§18. НЕРІВНОСТИ, ЩО МІСТЯТЬ ЗМІННУ ПІД ЗНАКОМ МОДУЛЯ	129
1. Нерівності виду $ f(x) > a$ та $ f(x) \geq a$, a – число	129
2. Нерівності виду $ f(x) < a$ та $ f(x) \leq a$, a – число	129
3. Загальний підхід до розв'язування нерівностей, що містять знак модуля	130
Контрольний тест № 4	131
§19. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ.	132
1. Рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = a$, a – число.....	132
2. Рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$	133
3. Рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$	133
4. Розв'язування ірраціональних рівнянь, що містять кілька квадратних коренів.....	134
5. Заміна змінних у ірраціональному рівнянні.	136
§20. СИСТЕМИ, ЩО МІСТЯТЬ ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ.	136
§21. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТИ.	137
1. Найпростіші ірраціональні нерівності.....	137
2. Нерівності виду $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)} \geq \sqrt[n]{g(x)}$	138
3. Нерівності виду $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$, $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$	139
4. Нерівності виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$, $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$	140
5. Розв'язування ірраціональних нерівностей, що містять декілька квадратних коренів.	140
Контрольний тест № 5	141
§22. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС І АРККОТАНГЕНС ЧИСЛА.	143
1. Арксинус і арккосинус числа.....	143
2. Арктангенс і арккотангенс	144
§23. НАЙПРОСТИШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ.....	144
1. Рівняння $\sin t = a$	144
2. Рівняння $\cos t = a$	146
3. Рівняння $\operatorname{tg} t = a$	147
4. Рівняння $\operatorname{ctg} t = a$	147
5. Тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших.	148

§24. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ	148
1. Заміна змінних у тригонометричних рівняннях.....	148
2. Зведення тригонометричного рівняння до однієї функції одного аргументу	149
3. Метод розкладання на множники.....	150
4. Однорідні тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до однорідних ..	151
5. Рівняння виду $a \sin x + b \cos x = c$	142
§25. СИСТЕМИ, ЩО МІСТЯТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ.	153
§26. НАЙПРОСТИШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ.....	154
Контрольний тест № 6	158
§27. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ.....	160
1. Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$	160
2. Рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$	161
3. Зведення показникових рівнянь до найпростіших способом винесення спільного множника за дужки	161
4. Рівняння виду $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $a \neq b$	161
5. Заміна змінних у показникових рівняннях	162
6. Однорідні показникові рівняння	162
§28. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ.....	163
1. Нерівності виду $a^x \geq b$, $a^x > b$, $a^x \leq b$, $a^x < b$, де $a > 0$, $a \neq 1$	163
2. Нерівності виду $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$	164
3. Розв'язування складніших показникових нерівностей.....	164
§29. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ.....	165
1. Рівняння виду $\log_a x = b$	165
2. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$	166
3. Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$	166
4. Рівняння, які зводяться до найпростіших за допомогою формул логарифмування	166
5. Заміна змінних у логарифмічних рівняннях.....	167
§30. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ.....	168
1. Нерівності виду $\log_a x \geq b$, $\log_a x > b$, $\log_a x \leq b$, $\log_a x < b$	168
2. Нерівності виду $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$	168
3. Розв'язування складніших логарифмічних нерівностей	169
§31. СИСТЕМИ, ЩО МІСТЯТЬ ПОКАЗНИКОВІ І ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ.....	170
Контрольний тест № 7	172
§32. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ ТА СИСТЕМ З ПАРАМЕТРАМИ....	174
1. Розв'язування рівнянь із параметрами.	174
2. Розв'язування нерівностей з параметрами.....	175
3. Розв'язування систем з параметром.....	176
§33. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ.	177
1. Використання ОДЗ рівняння або нерівності, яка є порожньою множиною або скінченною множиною	177
2. Оцінювання лівої і правої частини рівняння або нерівності.....	178
3. Використання монотонності функції при розв'язуванні рівняння.	178
§34. ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІЧНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ ТА СИСТЕМ.	179
1. Використання графічного методу розв'язування і дослідження рівнянь.	179

2.	Використання графічного методу розв'язування і дослідження нерівностей...	180
3.	Використання графічного методу розв'язування і дослідження системи рівнянь.....	181
	<i>Контрольний тест № 8</i>	182
	ЗРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ.....	184
	Розділ III. ФУНКЦІЯ.....	198
§1.	ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЮ.	198
1.	Означення функції	198
2.	Область визначення функції	198
3.	Область значень функції	199
4.	Табличний спосіб задання функції	199
5.	Графік функції. Графічний спосіб задання функції	199
6.	Нулі функції.....	200
7.	Проміжки зростання та спадання функції. Точки максимуму і точки мінімуму функції. Максимуми і мінімуми функції.....	200
§2.	ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ.	201
§3.	ПАРНІСТЬ І НЕПАРНІСТЬ ФУНКЦІЙ.	202
§4.	ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ.	203
1.	Означення та графік лінійної функції.....	203
2.	Пряма пропорційність.....	204
3.	Властивості лінійної функції	205
	<i>Контрольний тест № 1</i>	205
§5.	ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$, їХ ГРАФІКИ	
	ТА ВЛАСТИВОСТІ.	207
1.	Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік.....	207
2.	Функція $y = x^2$, її графік.....	208
3.	Функція $y = \sqrt{x}$, її графік функції.....	208
4.	Властивості функції $y = \frac{k}{x}$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$	209
§6.	ФУНКЦІЯ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, її ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ.....	210
1.	Означення квадратичної функції, її графік	210
2.	Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$	211
§7.	СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, її ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ.....	211
1.	Означення степеневої функції.....	211
2.	Функція $y = x^\alpha$, α – натуральне число	211
3.	Функція $y = x^\alpha$, якщо $\alpha = 0$	212
4.	Функція $y = x^\alpha$, α – ціле від'ємне число.....	212
5.	Функція $y = x^\alpha$, α – не ціле додатне число	212
6.	Функція $y = x^\alpha$, α – не ціле від'ємне число.....	213
7.	Властивості степеневої функції	214
	<i>Контрольний тест № 2</i>	215

§8. ПЕРІОДИЧНІСТЬ ФУНКІЙ.....	217
1. Означення періодичної функції.....	217
2. Найменший додатний період тригонометричних функцій.....	217
§9. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКІЇ, ЇХ ГРАФІКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ.....	218
1. Функція $y = \sin x$, її графік	218
2. Функція $y = \cos x$, її графік.....	219
3. Функція $y = \operatorname{tg} x$, її графік	219
4. Функція $y = \operatorname{ctg} x$, її графік.....	220
5. Властивості тригонометричних функцій.....	221
§10. ПОКАЗНИКОВА ФУНКІЯ, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ.	222
1. Означення показникової функції.....	222
2. Графік показникової функції.	222
3. Властивості показникової функції.....	223
§11. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ.	223
1. Означення логарифмічної функції.....	223
2. Графік логарифмічної функції.	223
3. Властивості логарифмічної функції.	225
§12. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВІДОМИХ ГРАФІКІВ ФУНКІЙ.....	225
1. $f(x) \rightarrow f(x) + n$	225
2. $f(x) \rightarrow f(x + m)$	226
3. $f(x) \rightarrow -f(x)$	226
4. $f(x) \rightarrow kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$	226
5. Послідовне використання декількох перетворень послідовно для побудови графіка функцій.....	227
Контрольний тест № 3	228
§13. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ.	231
1. Означення числової послідовності. Члени числової послідовності	231
2. Числові послідовності, що задані формулою.....	231
3. Числові послідовності, що задані переліком їх членів.	231
4. Задання числових послідовностей описом їх членів.	231
5. Числові послідовності, що задані таблицями	232
6. Числові послідовності, що задані рекурентно.	232
§14. АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ.	232
1. Означення арифметичної прогресії.	232
2. Формула n -го члена арифметичної прогресії.....	233
3. Властивості арифметичної прогресії.	233
4. Сума n перших членів арифметичної прогресії.	234
§15. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ.....	235
1. Означення геометричної прогресії.	235
2. Формула n -го члена геометричної прогресії.	236
3. Властивості геометричної прогресії.....	236
4. Сума n перших членів геометричної прогресії.	236
§16. НЕСКІНЧЕННА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ ЗІ ЗНАМЕННИКОМ $ q < 1$ ТА ЇЇ СУМА.....	237
1. Сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $ q < 1$	237

2.	Перетворення нескінчених десяткових періодичних дробів у звичайні	238
	<i>Контрольний тест № 4</i>	239
§17.	ПОХІДНА ФУНКЦІЇ.....	241
1.	Означення похідної функції в точці.....	241
2.	Таблиця похідних елементарних функцій.	241
3.	Правила знаходження похідної суми, різниці, добутку, частки двох функцій. ..	242
4.	Знаходження числового значення похідної функції в точці для заданого значення аргументу.	243
5.	Похідна складеної функції.	244
§18.	ГЕОМЕТРИЧНИЙ ТА ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ.	245
1.	Геометричний зміст похідної.	245
2.	Рівняння дотичної до графіка функції.	246
3.	Фізичний зміст похідної.....	247
§19.	ЗНАХОДЖЕННЯ ПРОМІЖКІВ МОНОТОННОСТІ ТА ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ.	247
1.	Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку.Знаходження проміжків монотонності функції.	247
2.	Знаходження точок екстремуму та екстремумів функції.	249
§20.	ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВИ ЇХНІХ ГРАФІКІВ.....	251
§21.	ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ВІДРІЗКУ. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕНЬ.....	254
1.	Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку.....	254
2.	Прикладні задачі на знаходження найбільшого або (i) найменшого значення деякої величини.	255
	<i>Контрольний тест № 5</i>	257
§22.	ПЕРВІСНА. ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ. ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ.	258
1.	Означення первісної.....	258
2.	Основна властивість первісних.....	259
3.	Таблиця первісних.....	259
4.	Правила знаходження первісних.....	260
§23.	ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА.	262
§24.	ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ КРИВОЛІНІЙНИХ ТРАПЕЦІЙ, ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР ТА ДО ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ.....	263
1.	Означення криволінійної трапеції та знаходження її площі.	263
2.	Обчислення площ плоских фігур.	264
3.	Обчислення об'єму тіла обертання.	265
4.	Переміщення матеріальної точки, що рухається прямолінійно.	266
5.	Робота сили, що діє на матеріальну точку.	266
	<i>Контрольний тест № 6</i>	267
	ЗРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ.....	269
	Розділ IV. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ.....	286
§1.	ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ.	286
1.	Правило суми і правило добутку.	286

2.	Поняття факторіалу.....	287
3.	Розміщення.....	287
4.	Перестановки.....	288
5.	Комбінації (сполучення).....	289
§ 2.	ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ	290
1.	Випадковий дослід і випадкова подія	290
2.	Вірогідна подія та неможлива подія	290
3.	Класичне означення ймовірності випадкової події	290
4.	Розв'язування задач на підрахунок ймовірностей за допомогою формул комбінаторики.....	291
§ 3.	ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ.....	292
1.	Генеральна сукупність та вибірка.....	292
3.	Систематизація і ранжування вибірки	292
4.	Вибіркові характеристики	293
5.	Графічна форма подання статистичної інформації	294
	ЗРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ.....	295

Геометрія

	Розділ I. ПЛАНІМЕТРІЯ.....	302
§ 1.	НАЙПРОСТИШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ..	302
1.	Точка і пряма	302
2.	Промінь.....	303
3.	Відрізок.....	303
4.	Ламана	304
5.	Кут	304
6.	Бісектриса кута.....	305
§ 2.	АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ	305
§ 3.	СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ	306
1.	Суміжні кути, їх властивості	306
2.	Вертикальні кути, їх властивості	306
3.	Кут між прямими.....	307
§ 4.	ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА, СЕРЕДИННИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР	307
1.	Перпендикулярні прямі	307
2.	Перпендикуляр і похила, відстань від точки до прямої	307
3.	Серединний перпендикуляр	308
§ 5.	ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. ОЗНАКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРІМІХ ..	309
1.	Паралельні прямі	309
2.	Кути, утворені при перетині двох прямих січною	309
3.	Ознаки паралельності прямих.....	309
4.	Властивості паралельних прямих	310
	<i>Контрольний тест № 1</i>	311
§ 6.	ТЕОРЕМА ФАЛЕСА, УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА	313
1.	Теорема Фалеса	313
2.	Узагальнена теорема Фалеса	314
§ 7.	КОЛО. КРУГ	314
1.	Коло, його елементи	314
2.	Круг, його елементи	316

3.	Центральні та вписані кути.....	316
4.	Властивість двох хорд, що перетинаються.....	317
5.	Дотична до кола та її властивості.....	318
6.	Взаємне розміщення двох кіл.	319
7.	Довжина кола. Довжина дуги кола.	321
§8.	ТРИКУТНИКИ.....	322
1.	Трикутник і його основні елементи.	322
2.	Види трикутників.....	322
3.	Ознаки рівності трикутників.	323
§9.	МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА, ВИСОТА ТРИКУТНИКА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.	325
1.	Медіана трикутника.	325
2.	Бісектриси трикутника.	326
3.	Висоти трикутника.	327
4.	Властивість медіан рівнобедреного трикутника.	328
	Контрольний тест № 2	329
§10.	СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА	331
§11.	ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА.....	332
§12.	НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА.....	333
§13.	СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ.	333
§14.	КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА. КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК....	334
1.	Коло, описане навколо трикутника.	334
2.	Коло, вписане у трикутник.....	335
	Контрольний тест № 3	336
§15.	ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК.	338
1.	Основні елементи та властивості прямокутного трикутника.	338
2.	Теорема Піфагора.	339
3.	Пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику.	340
4.	Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.	341
§16.	ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ. ТЕОРЕМА СИНУСІВ.	342
1.	Теорема косинусів.	342
2.	Теорема синусів.....	344
3.	Узагальнена теорема синусів.	345
	Контрольний тест № 4	345
§17.	ЧОТИРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ.	347
§18.	ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА.	348
1.	Означення паралелограма та його властивості.	348
2.	Ознаки паралелограма.	350
§19.	ПРЯМОКУТНИК, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ОЗНАКИ ПРЯМОКУТНИКА.	350
1.	Означення прямокутника та його властивості.....	350
2.	Ознаки прямокутника.....	351
§20.	РОМБ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ОЗНАКИ РОМБА.....	352
1.	Означення ромба та його властивості.....	352
2.	Ознаки ромба.....	353
§21.	КВАДРАТ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ОЗНАКИ КВАДРАТА.....	353
1.	Означення квадрата та його властивості.....	353
2.	Ознаки квадрата.....	354
	Контрольний тест № 5	355

§22. ТРАПЕЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ВИДИ. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ	357
1. Означення трапеції, її властивість.....	357
2. Види трапеції.....	357
3. Середня лінія трапеції, її властивості.	359
§23. ВПИСАНІ У КОЛО ТА ОПИСАНІ НАВКОЛО КОЛА ЧОТИРИКУТНИКИ.	360
1. Чотирикутник, вписаний у коло.	360
2. Чотирикутник, описаний навколо кола.....	361
§24. МНОГОКУТНИК.	361
1. Многокутник та його елементи.	361
2. Опуклий многокутник. Сума кутів описаного многокутника.	363
3. Вписані в коло та описані навколо кола многокутники.	363
§25. ПРАВИЛЬНИЙ МНОГОКУТНИК.	364
1. Означення правильного многоокутника.	364
2. Вписані у коло та описані навколо кола правильні многокутники.	365
Контрольний тест № 6	366
§26. ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ.	367
1. Формули для обчислення площини трикутника.	367
2. Формули для обчислення площини паралелограма.	368
3. Формули для обчислення площини ромба.....	370
4. Формули для обчислення площини прямокутника і квадрата.....	371
5. Формули для обчислення площини трапеції.	372
6. Формули для обчислення площини правильного многокутника.	373
7. Формули для обчислення площини круга, кругового сектора та сегмента	374
§27. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ. НАЙПРОСТИШІ ЗАДАЧІ....	376
1. Прямоокутна система координат на площині, координати точки.	376
2. Формули для обчислення координат середини відрізка.....	377
3. Формула для обчислення відстані між двома точками із заданими координатами.....	378
§28. РІВНЯННЯ КОЛА ТА ПРЯМОЇ.	378
1. Рівняння фігури на площині.	378
2. Рівняння кола.....	379
3. Рівняння прямої.....	379
Контрольний тест № 7	381
§29. ВЕКТОР.	383
1. Поняття вектора.....	383
2. Колінеарні вектори. Рівні вектори.	383
3. Додавання і віднімання векторів.	384
4. Множення вектора на число.	385
§30. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА. ДІЇ З ВЕКТОРАМИ, ЩО ЗАДАНІ КООРДИНАТАМИ...	386
1. Координати вектора.....	386
2. Сума та різниця векторів, що задані координатами.....	387
3. Множення вектора, що задано координатами, на число. Умова колінеарності векторів.	387
4. Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами.....	388
§31. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ.....	389
1. Скалярний добуток векторів.	389
2. Формула для знаходження кута між векторами, що задані координатами....	390

3.	Умова перпендикулярності векторів, що задані координатами	390
4.	Скалярний квадрат вектора.....	391
§32.	ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ.	391
1.	Геометричні перетворення фігур.	391
2.	Переміщення (рух) та його властивості.	392
3.	Симетрія відносно точки.	393
4.	Симетрія відносно прямої.	393
5.	Поворот.	393
6.	Паралельне перенесення.....	394
§33.	ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ. ГОМОТОЕТІЯ.....	395
1.	Перетворення подібності.	395
2.	Подібні фігури.	395
3.	Ознаки подібності трикутників.	396
4.	Гомотетія.....	398
5.	Відношення площ подібних фігур.	399
	<i>Контрольний тест № 8</i>	400
	ЗРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ.....	402
	Розділ II. СТЕРЕОМЕТРІЯ	419
§1.	ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ.	
	АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАСЛІДКИ З НІХ.....	419
1.	Основні поняття стереометрії.	419
2.	Аксіоми стереометрії.	419
3.	Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії.	420
§2.	ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ.	421
1.	Прямі у просторі.	422
2.	Паралельність прямих у просторі.....	422
3.	Мимобіжні прямі.....	423
§3.	ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ.	424
1.	Розміщення прямої і площини у просторі.	424
2.	Паралельність прямої і площини.	424
§4.	ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН.	426
1.	Розміщення двох площин у просторі.	426
2.	Паралельність площин.	426
3.	Властивості паралельних площин.....	426
§5.	ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ.ЗОБРАЖЕННЯ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ.	428
1.	Паралельне проектування.	428
2.	Властивості паралельного проектування.	429
3.	Зображення трикутника та його елементів.	430
4.	Зображення паралелограма та його видів.	431
5.	Зображення трапеції.	432
6.	Зображення правильного шестикутника.	432
7.	Зображення кола.....	433
	<i>Контрольний тест № 1</i>	433
§6.	ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ.	435
§7.	ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ.	436
1.	Означення прямої, перпендикулярної до площини.	436

2.	Ознака перпендикулярності прямої і площини	436
3.	Властивості прямих і площин, перпендикулярних між собою.	437
§8.	ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА. ПРОЕКЦІЯ ПОХИЛОЇ НА ПЛОЩИНУ.....	437
1.	Означення перпендикуляра, похилої та проекції похилої на площину.	437
2.	Властивості перпендикуляра і похилої.....	437
§9.	ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ.	439
§10.	ДВОГРАННИЙ КУТ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН.	440
1.	Двогранний кут. Лінійний кут двогранного кута.	440
2.	Перпендикулярність площин.	441
	Контрольний тест № 2	442
§11.	ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ.	445
1.	Відстань від точки до прямої.	445
2.	Відстань від точки до площини.	445
3.	Відстань від прямої до площини.	446
4.	Відстань між прямими, що належать одній площині.	446
5.	Відстань між площинами.	447
6.	Відстань між мимобіжними прямыми.	447
§12.	КУТИ У ПРОСТОРІ.	448
1.	Кут між прямими.	448
2.	Кут між правою і площиною.	449
3.	Кут між площинами.	449
4.	Ортогональне проектування.	451
	Контрольний тест № 3	452
§13.	МНОГОГРАННИКИ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ.....	454
§14.	ПОНЯТТЯ ПЕРЕРІЗУ МНОГОГРАННИКА.....	454
§15.	ПРИЗМА.	455
1.	Означення призми. Елементи призми. Види призм.	455
2.	Перерізи призми.	456
3.	Площі повної та бічної поверхонь призми.	457
4.	Об'єм призми.	459
§16.	ПАРАЛЕЛЕПІПЕД.	461
1.	Означення паралелепіпеда, його властивості.	461
2.	Прямокутний паралелепіпед, його властивості.	462
	Контрольний тест № 4	463
§17.	ПІРАМІДА.	465
1.	Означення піраміди. Елементи піраміди.	465
2.	Правильна піраміда.	467
3.	Перерізи піраміди.	468
4.	Площа повної та бічної поверхонь піраміди.	469
5.	Об'єм піраміди.	470
§18.	ЗРІЗАНА ПІРАМІДА.	472
1.	Означення зрізаної піраміди. Елементи зрізаної піраміди.	472
2.	Правильна зрізана піраміда.	473
3.	Діагональний переріз зрізаної піраміди.	473
4.	Площі повної та бічної поверхонь зрізаної піраміди.	474
5.	Об'єм зрізаної піраміди.	475
	Контрольний тест № 5	475

§19. ТІЛА І ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ, ЇХ ЕЛЕМЕНТИ.....	477
1. Тіла і поверхні обертання.....	477
2. Означення циліндра. Елементи циліндра.....	478
3. Перерізи циліндра площинами.....	479
4. Площі бічної та повної поверхонь циліндра.....	481
5. Об'єм циліндра.....	481
§20. КОНУС.....	482
1. Означення конуса. Елементи конуса.....	482
2. Перерізи конуса.....	482
3. Площі бічної та повної поверхонь конуса.....	484
4. Об'єм конуса.....	485
§21. ЗРІЗАНИЙ КОНУС.....	485
1. Означення зрізаного конуса. Елементи зрізаного конуса.....	485
2. Осьовий переріз зрізаного конуса.....	486
3. Площі бічної і повної поверхонь зрізаного конуса.....	487
4. Об'єм зрізаного конуса.....	487
Контрольний тест № 6	488
§22. КУЛЯ. СФЕРА.....	489
1. Означення кулі і сфери. Елементи кулі і сфери.....	490
2. Взаємне розміщення кулі і площин.....	490
3. Площина дотична до кулі (сфери).	491
4. Переріз кулі площиною.....	491
5. Площа сфери.	492
6. Об'єм кулі.	492
§23. КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ.....	492
1. Призма, вписана у циліндр.	493
2. Призма, описана навколо циліндра.	493
3. Піраміда, вписана у конус.....	494
4. Піраміда, описана навколо конуса.....	495
5. Многранник, вписаний в кулю.....	496
6. Многранник, описаний навколо кулі.	498
Контрольний тест № 7	500
§24. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ.	501
1. Прямоокутна система координат у просторі. Координати точки.....	501
2. Особливості розташування точок у просторі.	502
3. Ортогональні проекції точок на координатні площини. Відстань від точки до координатних площин.....	503
§25. ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ.	503
§26. ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КООРДИНАТ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА.	504
Контрольний тест № 8	504
§27. ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ.....	506
1. Поняття вектора у просторі, довжина вектора, колініарні вектори, рівні вектори.	506
2. Додавання і віднімання векторів.	507
3. Множення вектора на число.	507
§28. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЩО ЗАДАНО КООРДИНАТАМИ.	507
1. Координати вектора у просторі. Рівність векторів, заданих координатами. Модуль вектора.	508