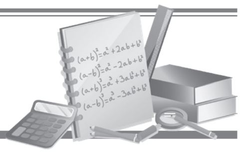
Розділ III. ФУНКЦІЯ



§ 1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЮ

1. Означення функції

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини відповідає єдине значення змінної y, то таку залежність називають ***функціональною залежністю***, або ***функцією***. При цьому змінну x називають ***незалежною змінною*** або ***аргументом***, змінну y – ***залежною змінною*** або ***функцією від аргумента***.

Найчастіше функції задають формулами (аналітичний метод задання), наприклад,

$$y=\frac{2x-3}{7};\qquad y=4x^2-5x+1;\qquad y=\sin x;\qquad y=\log_3 x-9 \quad \text{тощо.}$$

Приклад. Функцію задано формулою $y=\dfrac{10}{x+2}$. Знайти:

1) значення функції, що відповідає аргументу, що дорівнює −4;
2) значення агрумента, при якому значення функції дорівнює 2.

Розв'язання. 1) За умовою $x = -4$, тоді маємо $y=\dfrac{10}{-4+2}$; $y=-5$.

2) Щоб знайти x, при якому $y = 2$, розв'яжемо рівняння $2=\dfrac{10}{x+2}$; $x+2=5$; $x = 3$. Отже, значення $y = 2$ функція набуває при $x = 3$.

2. Область визначення функції

Усі значення, які може набувати незалежна змінна (аргумент), утворюють ***область визначення функції***. Область визначення функції ще називають областю допустимих значень функції. Область визначення функції позначають $D(y)$.

Приклад. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{4}{x-3}$; 2) $y=\sqrt{x+2}$.

Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі значення x, при яких має зміст дріб $\dfrac{4}{x-3}$.

Знайдемо ті значення x, при яких знаменник дробу дорівнює нулю: $x - 3 = 0$, $x = 3$. Отже, областю визначення функції є всі числі крім 3. Коротко це можна записати так: $x \neq 3$.

2) Область визначення функції – всі значення x, при яких має зміст вираз $\sqrt{x+2}$. Тому область визначення знаходимо з умови $x+2\geq 0$, тобто $x\geq -2$. Можна записати: $D(y)=[-2;+\infty]$.

3. Область значень функції

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють ***область значень функції***. Часто використовуться термін ***«множина значень функції»***.

Область значення функції позначають $E(y)$.

Приклад. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 2-|x|$; 2) $y=\sqrt{x^2+9}+1$.

Розв'язання. 1) Оскільки $|x| \geq 0$, то $-|x| \leq 0$, а тому $2-|x| \leq 2$, тобто $y \leq 2$. Отже, проміжок $(-\infty; 2]$ – область значень функції, тобто $E(y)=(-\infty;2]$.

2) Оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень x, то $x^2+9 \geq 9$ і $\sqrt{x^2+9} \geq 3$. Тому $\sqrt{x^2+9}+1 \geq 4$, а, отже, $y \geq 4$. Маємо $E(y)=[4;+\infty)$.

4. Табличний спосіб задання функції

Задавати функцію можна і таблицею *(табличний спосіб задання функції)*.

Приклад. Починаючи з восьмої години і до тринадцятої години, через кожну годину вимірювали атмосферний тиск і дані записували в таблицю:

Час t, год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p, мм рт.ст.	752	753	755	753	752	751

Таблиця задає відповідність між годинами t доби і атмосферним тиском p. Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає одне значення змінної p. У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p – залежною змінною. Область визначення функції утворюють числа: 8, 9, 10, 11, 12, 13 (числа першого ряда таблиці), а область значень 751, 752, 753, 755 (числа другого ряду таблиці).

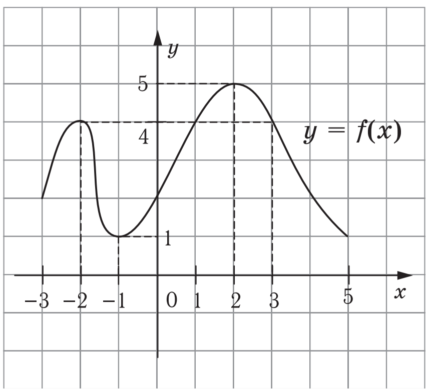
5. Графік функції. Графічний спосіб задання функції

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Надалі будемо розглядати графіки різних функцій: лінійних, квадратних, степеневих тощо.

Крім того графік також може задавати функцію. Такий спосіб задання функції називається ***графічним***.

Приклад. На *малюнку 73* функція $y=f(x)$ задана графіком на проміжку [−3; 5]. За допомогою графіка знайти:



мал. 73

1) значення функції, якщо $x = -1$; $x = 2$;
2) значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 4$.

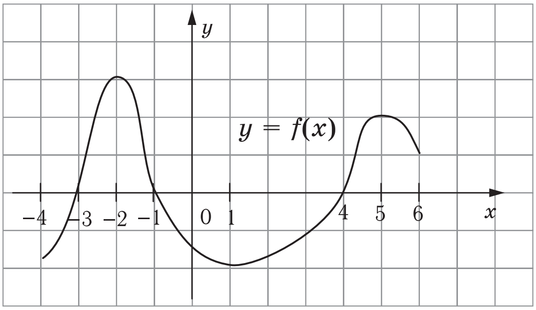
Розв'язання.

1) якщо $x = -1$, то $y = 1$; якщо $x = 2$, то $y = 5$;

2) якщо $y = 4$, то $x = -2$ або $x = 3$.

6. Нулі функції

Нуль функції – значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю.



мал. 74

Якщо функцію задано графічно, то кожен нуль функції – це абсциса перетину графіка функції з віссю Ox. Для функції $y = f(x)$, що задана графічно на *малюнку 74* нулями є $x = -3$; $x = -1$ і $x = 4$.

Якщо функцію задано формулою $y = f(x)$, то її нулями є розв'язки рівняння $f(x) = 0$.

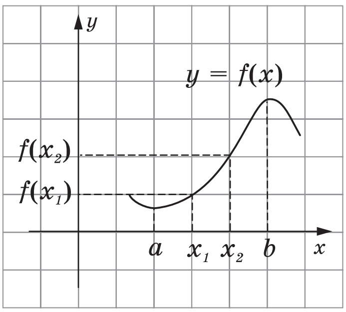
Приклад. Знайти нулі функції $y = x^2 - 5x + 6$.

Розв'язання. Маємо $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ – нулі функції.

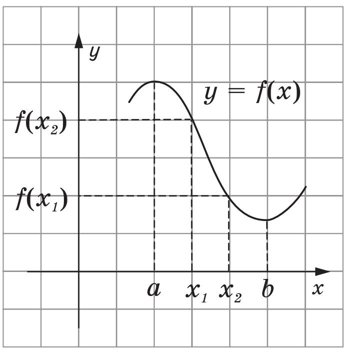
7. Проміжки зростання та спадання функції. Точки максимуму і точки мінімуму функції. Максимуми і мінімуми функції

Функцію $y = f(x)$ називають ***зростаючою на деякому проміжку***, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

На *малюнку 75* зображено графік функції $y = f(x)$, що зростає на проміжку $[a; b]$ (проміжок $[a; b]$ при цьому називають ***проміжком зростання функції***). Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжка, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.



мал. 75



мал. 76

Функцію $y = f(x)$ називають ***спадною на деякому проміжку***, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

На *малюнку 76* зображено графік функції $y = f(x)$, що спадає на проміжку [*a*; *b*] (проміжок [*a*; *b*] при цьому називають ***проміжком спадання функції***). Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжка, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$. Функція, котра на деякому проміжку тільки зроста або тільки спадає, називається ***монотонною*** на цьому проміжку.

Приклад 1. Для функції $y = f(x)$, заданої графічно на *малюнку 76* проміжки зростання: [−4; −2] і [1; 5], проміжки спадання: [−2; 1] і [5; 6].

Точку x_0 називають ***точкою максимуму функції*** $y = f(x)$, якщо для всіх x із деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$. Значення функції в точці максимуму називають ***максимумом функції***. На *малюнку 75* $x = b$ – точка максимуму функції, а на *малюнку 76* $x = a$ – точка максимуму функції.

Точку x_0 називають ***точкою мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$.Значення функції в точці мінімуму називають ***мінімумом функції***. На малюнку 68 $x = a$ – точка мінімуму функції, а на *малюнку 76* $x = b$ – точка мінімуму функції.

Приклад 2. Для функції $y = f(x)$ (*мал. 74*), що задана графічно на проміжку [−4; 6], $x = 1$ – точка мінімуму, це записують так: $x_{min} = 1$; $y_{min} = x(1) = -2$ – мінімум функції. У функції дві точки максимуму: $x = -2$ і $x = 5$. Це записують так: $x_{max} = -2$, $x_{max} = 5$, $y_{max} = y(-2) = 3$, $y_{max} = y(5) = 2$ – максимуми функції.

§ 2. ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

Функцію, що набуває кожне своє значення в єдиній точці області визначення, називають ***оборотною***.

Наприклад, функція $y = 2x + 5$ є оборотною. Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною на множині *R*, оскільки, наприклад, значення 9 функція приймає в двох точках 3 і −3.

Нехай $y = f(x)$, де $f(x)$ – оборотна функція. Тоді для кожного значення y рівняння має єдиний розв'язок x: $x = g(y)$. Цю функцію $x = g(y)$ називають ***оберненою*** до функції $f(x)$. Оскільки в елементарній математиці прийнято позначати аргумент через x, а функцію через y, то остаточно маємо: $y = g(x)$.

Приклад. Для функції $f(x) = 2x + 5$ знайти обернену.

Розв'язання. Маємо $y = 2x + 5$; виразимо x через y. $2x = y - 5$, $x = \frac{y-5}{2}$. Позначимо аргумент через x, а функцію – через y і остаточно отримаємо $y = \frac{x-5}{2}$, або $g(x) = \frac{x-5}{2}$.

Зрозуміло, що якщо g обернена до f, то й f – обернена до g. Такі дві функції називають ***взаємно оберненими***.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Якщо функція зростаюча (спадна), то вона має обернену, яка також зростаюча (спадна).

§ 3. ПАРНІСТЬ І НЕПАРНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Область визначення функції $y = f(x)$ називають ***симетричною відносно нуля***, якщо разом із кожним числом x область визначення містить також і число $(-x)$. Серед функцій із областю визначення, симетричною відносно нуля, розрізняють парні і непарні.

Функцію $y = f(x)$ називають ***парною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Приклад 1. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^4$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки $f(x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, то функція парна.

Корисною є ***властивість парної функції: графік будь-якої парної функції симетричний відносно осі Оу.***

Функцію $y = f(x)$ називають ***непарною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Приклад 2. Дослідити на парність функцію $f(x) = \frac{10}{-x}$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки $f(-x) = \frac{10}{x} = -f(x)$, то функція непарна.

Корисною є ***властивість непарної функції: графік будь-якої непарної функції симетричний відносно початку координат.***

З даних означень випливає, що у випадку несиметричності області визначення функції відносно нуля ця функція не може бути ні парною, ні непарною.

Приклад 3. Дослідити на парність функцію $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Область визначення не симетрична відносно нуля, оскільки значення $x = -2$ належить області визначення, а значення $x = 2$ – не належить. Тому функція ні парна, ні непарна.

Приклад 4. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^2 - x$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Для кожного x $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x = -(-x^2 - x)$. Оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, то функція ні парна, ні непарна.

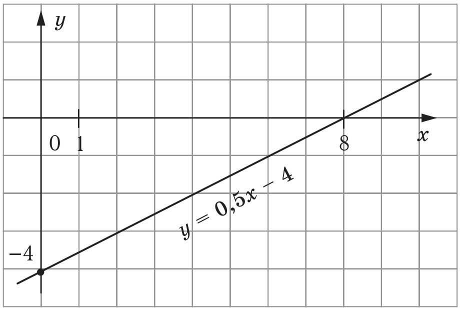
§ 4. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

1. Означення та графік лінійної функції

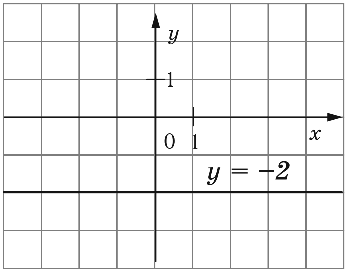
Лінійною називають ***функцію***, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x – незалежна змінна, k і b – деякі числа.

Приклади лінійних функцій:

$$y = 2x - 5;\quad y = -\frac{1}{3}x;\quad y = 4;\quad y = 0{,}7x - 2 \quad \text{тощо.}$$



мал. 77



мал. 78

Графіком будь-якої лінійної функції є пряма, тому для побудови такого графіка достатньо мати дві його точки. При цьому число k називається ***кутовим коефіцієнтом прямої***.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = 0{,}5x - 4$.

Розв'язання. Складемо таблицю для двох яких-небудь значень аргумента.

x	0	8
y	–4	0

Позначимо ці точки на координатній площині (*мал. 77*) та проведемо через них пряму. Отримали графік фунції $y = 0{,}5x - 4$.

Якщо $k = 0$, то формула $y = kx + b$ набуває вигляду $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Лінійна функція, задана формулою $y = b$, набуває одного й того самого значення при будь-якому x.

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = -2$.

Розв'язання. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y, що дорівнює -2. Графіком функції є пряма, що утворена точками з координатами $(x; -2)$ де x – будь-яке число. Позначимо будь-які дві точки з ординатами -2 (наприклад, $(-4; -2)$ і $(3; -2)$) і проведемо через них пряму (*мал. 78*). Ця пряма є графіком функції $y = -2$. Зауважимо, що вона паралельна осі Ox.

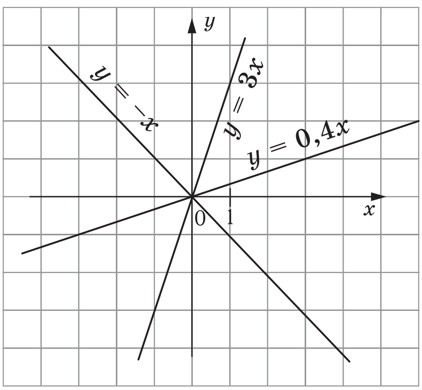
Взагалі, ***щоб побудувати графік функції $y = b$, досить позначити на осі Оу точку з координатами $(0; b)$ та провести через цю точку пряму, паралельну до осі Ох.***

2. Пряма пропорційність

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – число відмінне від нуля, називають ***прямою пропорційністю***.

Зауважимо, що ***графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат, причому якщо $k > 0$, то пряма розташована у I та III координатних чвертях, а якщо $k < 0$, то пряма розташована у II та IV координатних чвертях.***

На *малюнку 79* зображено графіки функцій $y = 3x$; $y = -x$ і $y = 0{,}4x$.



мал. 79

3. Властивості лінійної функції

Систематизуємо дані про властивості лінійної функції у наступній таблиці:

№	Властивості	$y = kx + b$			
		$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$, $b > 0$	$k = 0$, $b < 0$
1	Область визначення	R	R	R	R
2	Нулі функції	$x = -\dfrac{b}{k}$	$x = -\dfrac{b}{k}$	–	–
3	$y > 0$	$x > -\dfrac{b}{k}$	$x < -\dfrac{b}{k}$	$x \in R$	–
4	$y < 0$	$x < -\dfrac{b}{k}$	$x > -\dfrac{b}{k}$	–	$x \in R$
5	Зростає на проміжку	$(-\infty; \infty)$	–	Функція є сталою	
6	Спадає на проміжку	–	$(-\infty; \infty)$	Функція є сталою	
7	Найбільше значення функції	–	–	b	b
8	Найменше значення функції	–	–	b	b
9	Область значень	R	R	$y = b$	$y = b$
10	Парність, непарність	Якщо $b \neq 0$, то ні парна, ні непарна, якщо $b = 0$, то непарна		Парна	

Контрольний тест № 1

1. Для якої з поданих функцій областю визначення є множина $(-\infty; 2]$?

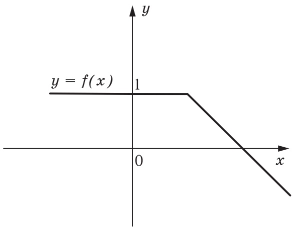
А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x-2}$	$y = x - 2$	$y = 2 - x$	$y = \sqrt{2-x}$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

2. Знайти область значень функції: $y = x^2 - 1$.

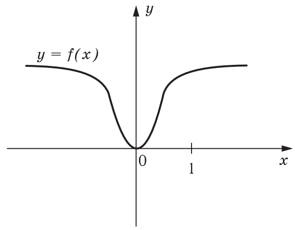
А	Б	В	Г	Д
$[1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 1)$	$[-1; +\infty)$	$(-1; +\infty)$

3. Для якої з функцій $y = f(x)$, графіки яких подано, виконується умова $f(0) = -1$.

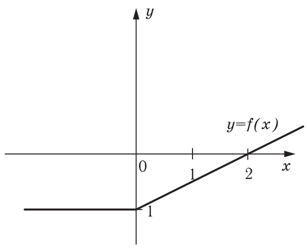
А



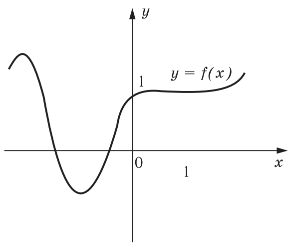
Б



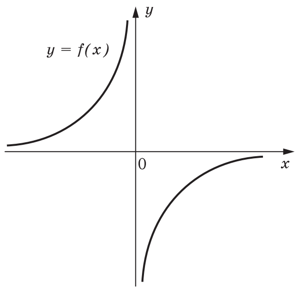
В



Г



Д



4. Знайти нулі функції: $y = x^2 + 2x - 3$.

А	Б	В	Г	Д
$-1;\ 3$	$1;\ -3$	1	-3	функція не має нулів

5. Для функції $y = 4x - 8$ знайти обернену.

А	Б	В	Г	Д
$y = 4x - 8$	$y = 8x - 4$	$y = 4x + 8$	$y = \dfrac{x-8}{4}$	$y = \dfrac{x+8}{4}$

6. Серед запропонованих функцій вказати непарну.

А	Б	В	Г	Д
$y = x \sin x$	$y = x + \sin x$	$y = x^4$	$y = x^3 + 1$	$y = \dfrac{x^5 + x}{x}$

7. Яка з запропонованих функцій є зростаючою на множині дійсних чисел?

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 7$	$y = -7x + 2$	$y = 2$	$y = 2x - 7$	$y = -\dfrac{1}{7}x + \dfrac{1}{2}$

8. Графіком функції є пряма лінія, паралельна осі абсцис, що проходить через точку (–2;3). Задати функцію формулою.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$x = -2x + 3$

9. Пряму пропорційність задано формулою $y = \frac{5}{6}x$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 30?

А	Б	В	Г	Д
0	36	–36	30	25

10. Знайти координати точок перетину графіка функції $y = 1{,}5x + 6$ з осями координат.

А	Б	В	Г	Д
(0; 6); (4; 0)	(0; 6)	(6; 0); (0; –4)	(0; 6); (–4; 0)	(0; 4); (0; –6)

11. Знайти найменше значення функції: $y = \sqrt{4 - x^2} - 3$.

12. Знайти ординату точки перетину графіків функцій $y = 3x - 5$ і $y = x - 7$.

§ 5. ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$, ЇХ ГРАФІКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ

1. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік

Оберненою пропорційністю називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де x – незалежна змінна, k – деяке число, відмінне від нуля.

Областю допустимих значень функції $y = \frac{k}{x}$ є множина всіх дійсних чисел, крім нуля. Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ є крива, що складається з двох віток – ***гіпербола***, причому, якщо $k > 0$, то її вітки розташовано у I та III координатних чвертях, а якщо $k < 0$, то у II та IV координатних чвертях.

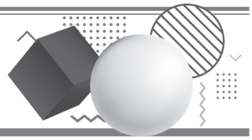
Приклад 1. Побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції $y = \frac{6}{x}$ для кількох значень аргумента.

x	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
y	–1	–2	–3	–6	6	3	2	1

ГЕОМЕТРІЯ

Розділ І. ПЛАНІМЕТРІЯ



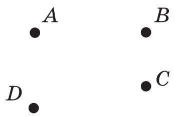
§ 1. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1. Точка і пряма

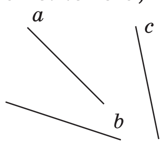
Геометрія – це наука про властивості геометричних фігур.

Планіметрія – частина геометрії, яка вивчає властивості геометричних фігур на площині.

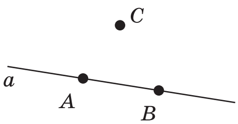
Площина є однією з основних геометричних фігур. Уявлення про частину площини дає поверхня столу, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має межі та не має товщини.



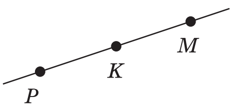
мал. 147



мал. 148



мал. 149



мал. 150

Основними геометричними фігурами на площині є ***точка*** і ***пряма***. Точки позначають великими латинськими буквами A, B, C, D... (*мал. 147*). Прямі можна проводити за допомогою лінійки (*мал. 148*). При цьому зображують частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають малими латинськими буквами a, b, c.

На *малюнку 149* зображено пряму a і точки A, B, C. Точки A і B ***лежать*** на прямій a; говорять також, що точки A і B ***належать прямій a***, або що пряма a ***проходить через точки A і B***. Точка C ***не лежить на прямій a;*** інакше кажучи, точка C не належить прямій a, або пряма ***a не проходить через точку C***.

Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

Для зручності замість слів «точка A належить прямій a» користуються записом $A \in a$, а замість слів «точка C не належить прямій a» – записом $C \notin a$.

Зауважимо, що через точки A і B не можна провести іншу пряму, яка не збігається з прямою a.

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

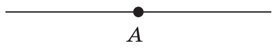
Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад, A і B, можна позначити двома буквами: AB або BA.

На *малюнку 149* точка C не належить прямій AB, це записують так $C \notin AB$. Говорять також, що ***точки A, B і C не лежать на одній прямій*** (не належать одній прямій).

На *малюнку 150* точки P, K і M лежать на одній прямій, причому точка K лежить між точками P і M.

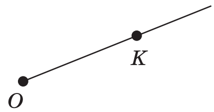
З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

2. Промінь



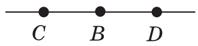
мал. 151

Проведемо пряму і позначимо на ній точку A (*мал. 151*). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожну з яких разом із точкою A називають ***променем,*** що виходить з точки A. Точка A називається ***початком*** кожного з променів. Промені позначаються двома великими латинськими буквами, перша з яких початком променя, а друга – якась інша точка на промені (наприклад промінь OK на *малюнку 152*).



мал. 152

Різні промені однієї прямої, що мають спільний початок, називають ***доповняльними***. На *малюнку 153* промінь BC доповняльний для променя BD, і навпаки, промінь BD є доповняльним для променя BC.



мал. 153

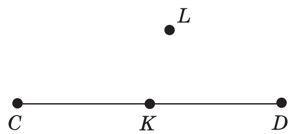
3. Відрізок

Відрізком називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом з цими точками. Ці точки називають кінцями відрізка.

На *малюнку 154* зображено відрізок AB; точки A і B – його кінці.

мал. 154

На *малюнку 155* точка K належить відрізку CD, а точка L не належить відрізку CD.



мал. 155

Для вимірювання відрізків необхідно мати ***одиничний відрізок*** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є, наприклад, 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

На *малюнку 156* зображено відрізок AB. Точка C ділить відрізок AB на два відрізки AC і CB. При цьому $AB = AC + CB$.

мал. 156

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

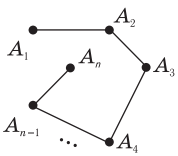
Довжину відрізка називають також ***відстанню між його кінцями***.

Приклад. Точка C належить відрізку AB, довжина якого дорівнює 7,5 см. Визначте довжини відрізків AC і CB, якщо BC коротший за AC у 2 рази.

Розв'язання (*мал. 156*). Нехай довжина відрізка $BC = x$ см, тоді $AC = 2x$ см. Оскільки $AC + CB = AB$, то маємо рівняння $2x + x = 7{,}5$. Розв'язуємо його: $3x = 7{,}5$; $x = 2{,}5$. Отже, $BC = 2{,}5$ см; $AC = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ см.

Точку відрізка, яка ділить його навпіл, тобто на два рівні відрізки, називають ***серединою відрізка***.

4. Ламана



мал. 157

Ламаною $A_1A_2A_3\ldots A_n$ називають фігуру, яка складається з точок $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ і відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, що їх сполучають (*мал. 157*). Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ називають ***вершинами ламаної***, а відрізки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, – ***ланками ламаної***.

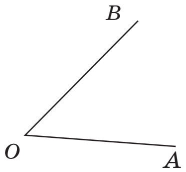
Довжиною ламаної називають суму довжин її ланок.

Довжина ламаної не менша за довжину відрізка, що сполучає її кінці.

5. Кут

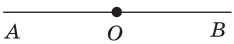
Кут – це геометрична фігура, яка складається з точки і двох променів, що виходять із цієї точки.

Промені називають ***сторонами кута***, а їх спільний початок – ***вершиною кута***.



мал. 158

На *малюнку 158* зображено кут з вершиною *O* і сторонами *OA* та *OB*. Такий кут можна назвати кутом *O*, або кутом *AOB*, або кутом *BOA*. У другому та третьому варіантах назви кута буква *O*, що позначає вершину кута, ставиться посередині. Слово «кут» можна замінити знаком $\angle$, записавши кут так: $\angle O$, або $\angle AOB$, або $\angle BOA$.

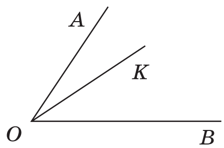


мал. 159

Розгорнутий кут – це кут, сторони якого є доповняльними променями (*мал. 159*).

Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

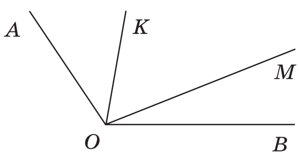


мал. 160

На *малюнку 160* промінь *OK* ділить *AOB* на два кути: *BOK* і *KOA*. Тоді

$$\angle AOB = \angle AOK + \angle BOK.$$

Приклад. Промені *OK* і *OM* проходять між сторонами кута *AOB*, який дорівнює 120°. $\angle KOB = 80^\circ$, $\angle AOM = 90^\circ$. Знайти градусну міру кута *KOM*.



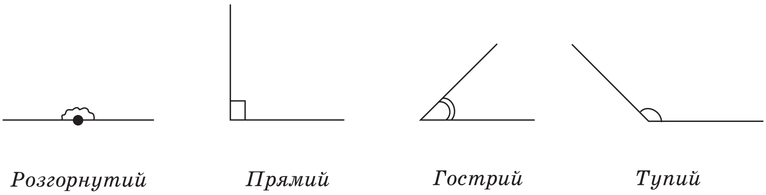
мал. 161

Розв'язання (*мал. 161*).

$\angle MOB = \angle AOB - \angle AOM = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Тоді $\angle KOM = \angle KOB - \angle MOB = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$.

Розрізняють наступні види кутів. Кут називають ***розгорнутим***, якщо його градусна міра дорівнює 180°, ***прямим*** – якщо його градусна міра дорівнює 90°, ***гострим*** – якщо він менший від прямого, ***тупим*** – якщо він більший від прямого, але менший від розгорнутого (*мал. 162*).



мал. 162

6. Бісектриса кута

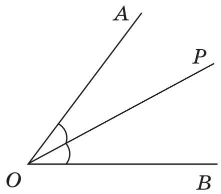
Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить його на два рівні кути.

На *малюнку 163* промінь OP – бісектриса кута AOB.

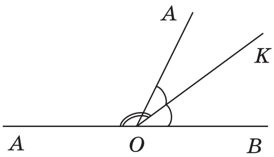
Приклад. Який кут утворює бісектриса кута 50° з продовженням однієї з його сторін?

Розв'язання (*мал. 164*). $\angle KOB = \dfrac{\angle AOB}{2} = \dfrac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

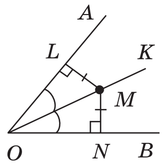
Тоді, $\angle MOK = \angle MOB - \angle KOB = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.



мал. 163



мал. 164



мал. 165

Властивість бісектриси кута: ***будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута*** (дивіться § 4).

На *малюнку 165* промінь OK – бісектриса кута AOB; $M \in OK$, ML і MN – відстані від точки M до сторін кута. Тоді $ML = MN$.

§ 2. АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Аксіоми планіметрії – це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як вихідні положення.

Нагадаємо деякі вже відомі нам аксіоми.

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

V. ***Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.***

VI. ***Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°.***

VII. ***Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.***

Ще одна важлива аксіома – аксіома паралельності прямих або аксіома Евкліда буде сформульована в § 5.

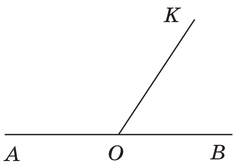
§ 3. СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

1. Суміжні кути, їх властивості

Два кути називають суміжними, якщо одна сторона в них спільна, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На *малюнку 166* кути AOK і KOB – суміжні.

Властивість суміжних кутів: ***сума суміжних кутів дорівнює 180°.***



мал. 166

Приклад. Знайти міри суміжних кутів, якщо один з них на 50° більший за інший.

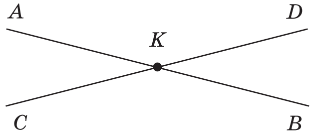
Розв'язання (*мал. 166*). Нехай $\angle KOB = x$, тоді $\angle AOK = x + 50^\circ$.

За властивістю суміжних кутів $x + x + 50^\circ = 180^\circ$; $2x = 130^\circ$; $x = 65^\circ$.

Отже, $\angle KOB = 65^\circ$, $\angle AOK = 115^\circ$.

2. Вертикальні кути, їх властивості

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями до сторін іншого.



мал. 167

На *малюнку 167* прямі AB і CD перетинаються в точці K. Кути AKC і DKB – вертикальні, кути AKD і CKB теж вертикальні.

Властивість вертикальних кутів: ***вертикальні кути рівні.***

Приклад. Градусні міри двох з чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 2:7. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.

Розв'язання (*мал. 167*). Кути, описані в умові, мають різні градусні міри і тому є не вертикальними, а суміжними.

Позначимо $\angle AKC = 2x$; $\angle AKD = 7x$.

За властивістю суміжних кутів $2x + 7x = 180^\circ$; $9x = 180^\circ$; $x = 20^\circ$.

Отже, $\angle AKC = \angle BKD = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, $\angle AKD = \angle BKC = 7 \cdot 20^\circ = 140^\circ$.

3. Кут між прямими

Кутом між прямими, що перетинаються, називають менший із кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

Наприклад, кут між прямими AB і CD із прикладу попереднього пункту дорівнює 40°. Зрозуміло, що кут між прямими не перевищує 90°.

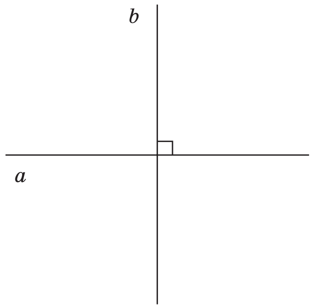
§ 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА, СЕРЕДИННИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

1. Перпендикулярні прямі

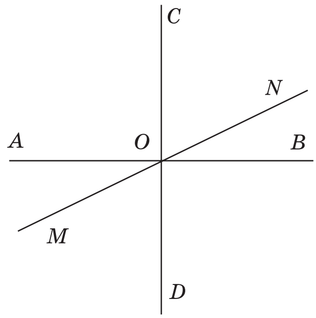
Дві прямі називають перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На *малюнку 168* прямі a і b перпендикулярні. Перпендикулярність прямих можна записати за допомогою знака «$\perp$». Запис $a \perp b$ означає, що прямі a і b перпендикулярні.

Приклад. Прямі AB, CD і MN перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (*мал. 169*). Знайдіть $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 155^\circ$.



мал. 168



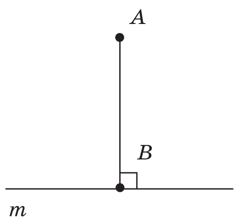
мал. 169

Розв'язання. $\angle MOD = \angle MOB - \angle DOB = 155^\circ - 90^\circ = 65^\circ$. Кути CON і MOD вертикальні. Тому $\angle CON = \angle MOD = 65^\circ$.

2. Перпендикуляр і похила, відстань від точки до прямої

Перпендикуляром до прямої, проведеним із даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один із кінців якого – дана точка, а інший – точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають ***відстанню від точки до прямої.***

На *малюнку 170* з точки A до прямої m проведено перпендикуляр AB. Точку B називають ***основою перпендикуляра***. Довжина відрізка AB – відстань від точки A до прямої m.



мал. 170

Нехай AB – перпендикуляр, проведений з точки A до прямої m, а K – довільна точка прямої m, відмінна від B (*мал. 171*). Відрізок AK називають ***похилою***, проведеною з точки A до прямої m. Точку K називають ***основою похилої***, а відрізок BK – ***проекцією похилої***.

Розглянемо ***властивості перпендикуляра і похилої.***

1. Перпендикуляр, проведений із даної точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної з цієї самої точки до прямої.

На *малюнку 171*: $AB < AK$.

2. Якщо дві похилі, проведені до прямої з деякої точки, рівні, то рівні їх проекції.

На *малюнку 172*: $AB \perp m$, $AL = AK$. Тому $LB = BK$.

3. Якщо дві похилі, проведені до прямої з даної точки, мають рівні проекції, то вони рівні.

На *малюнку 172*: $AB \perp m$, $LB = BK$. Тому $AL = AK$.

4. Якщо з даної точки проведено до прямої дві похилі, то більша похила має більшу проекцію на цю пряму.

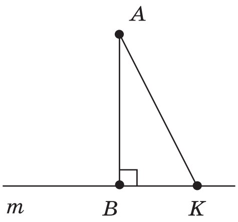
На *малюнку 173*: $AB \perp m$, $AN > AM$. Тому $BN > MB$.

5. Якщо з даної точки проведено до прямої дві похилі, то більшою з них є та, яка має більшу проекцію на дану пряму.

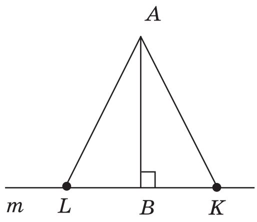
На *малюнку 173*: $AB \perp m$, $BN > MB$. Тому $AN > AM$.

Приклад. З однієї точки до прямої проведено дві рівні похилі. Проекція однієї з похилих дорівнює 5 см. Знайти відстань між основами похилих.

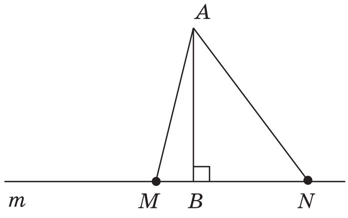
Розв'язання (*мал. 172*). За умовою, $AL = AK$ і $LB = 5$ см. Тоді $BK = LB = 5$ (см) і $LK = 5 + 5 = 10$ (см).



мал. 171



мал. 172



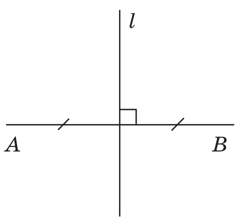
мал. 173

3. Серединний перпендикуляр

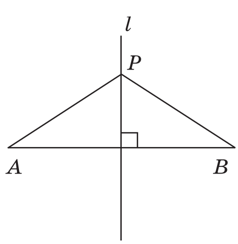
Серединним перпендикуляром до відрізка називають пряму, яка проходить через середину відрізка і перпендикулярна до нього. На *малюнку 174* пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Властивість серединного перпендикуляра:
кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка (знаходиться на однакових відстанях від них).

На *малюнку 175* точка P – довільна точка серединного перпендикуляра до відрізка AB – прямої l. Тоді $PA = PB$.



мал. 174



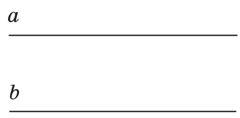
мал. 175

§ 5. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. ОЗНАКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРІМИХ

1. Паралельні прямі

Дві прямі на площині називають ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.

На *малюнку 176* прямі a і b паралельні. Паралельність прямих записують за допомогою знака $\parallel$. Запис $a \parallel b$ означає, що прямі a і b паралельні.



мал. 176

Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає ***основну властивість паралельних прямих***.

VIII. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Цю аксіому називають ***аксіомою паралельності прямих*** або ***аксіомою Евкліда***.

2. Кути, утворені при перетині двох прямих січною

Пряму називають ***січною*** відносно прямих a і b, якщо вона перетинає їх у двох точках (*мал. 177*).

При перетині прямих a і b січною c утворилося вісім кутів, для зручності позначених цифрами на *малюнку 177*. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:

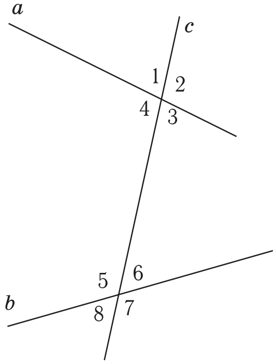
внутрішні односторонні кути: 4 і 5; 3 і 6;
внутрішні різносторонні кути: 4 і 6; 3 і 5;
відповідні кути: 1 і 5; 2 і 6; 3 і 7; 4 і 8.

3. Ознаки паралельності прямих

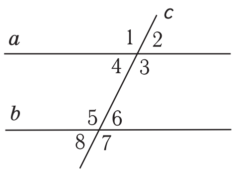
Ознака (у геометрії) – це теорема, що вказує умови, при виконанні яких можна стверджувати про певні властивості фігур, чи їх належність до певного класу.

Ознака паралельності прямих. Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

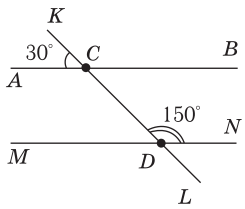
На *малюнку 178*: c – січна для a і b. Якщо $\angle 1 = \angle 5$ або $\angle 2 = \angle 6$ або $\angle 3 = \angle 7$ або $\angle 4 = \angle 8$, то $a \parallel b$.

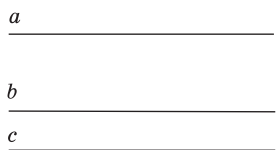


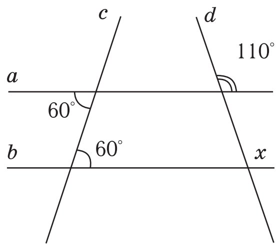
мал. 177



мал. 178







мал. 179 *мал. 180* *мал. 181*

Наслідок 1. ***Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.***

На *малюнку 178*: *c* – січна для *a* і *b*. Якщо $\angle 3 = \angle 5$ або $\angle 4 = \angle 6$, то $a \parallel b$.

Наслідок 2. ***Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.***

На *малюнку 178*: *c* – січна для *a* і *b*. Якщо $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ або $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$, то $a \parallel b$.

Приклад. Чи є паралельними прямі *AB* і *MN* на *малюнку 179*?

Розв'язання. $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні), $\angle BCD = 30^\circ$. Оскільки $30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$, то сума внутрішніх односторонніх кутів *BCD* і *CDN* дорівнює 180°. Тому, за наслідком 2, $AB \parallel MN$.

4. Властивості паралельних прямих

Розглянемо ***властивості паралельних прямих.***

1. ***Дві прямі, кожна з яких паралельна до третьої прямої, паралельні одна до одної.***

   На *малюнку 180*: $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Тому $a \parallel c$.

2. ***Відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.***

   На *малюнку 178*: $a \parallel b$, *c* – січна. Тому $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$.

3. ***Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.***

   На *малюнку 178*: $a \parallel b$, *c* – січна. Тому $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$.

4. ***Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.***

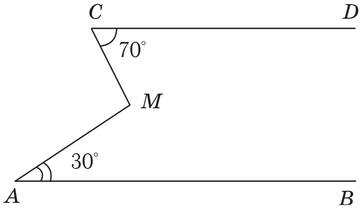
   На *малюнку 178*: $a \parallel b$, *c* – січна. Тому $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$.

Приклад 1. Знайти градусну міру кута *x* на *малюнку 181*.

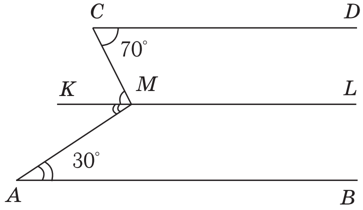
Розв'язання. Оскільки внутрішні односторонні кути, утворені при перетині січною *c* прямих *a* і *b*, рівні (обидва по 60°), то $a \parallel b$. Відповідні кути, утворені при перетині січною *d* паралельних прямих *a* і *b*, рівні. Тому $x = 110^\circ$.

Приклад 2. На *малюнку 182* $AB \parallel CD$. Знайти градусну міру кута CMA.

Розв'язання. 1) проведемо через точку M пряму KL, паралельну до прямої AB (*мал. 183*). $\angle KMA = \angle MAB = 30^\circ$ (внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною AM паралельних прямих KL і AB).



мал. 182



мал. 183

2) За властивістю 1 паралельних прямих маємо $KL \parallel CD$.

3) $\angle KMC = \angle DCM = 70^\circ$ (внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною CM паралельних прямих KL і CD).

4) Тоді $\angle CMA = \angle CMK + \angle KMA = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$.

Контрольний тест № 1

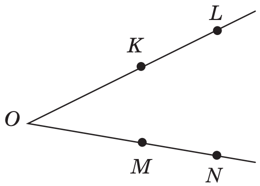
1. Точка K належить відрізку AB, довжина якого дорівнює 12 см. Відрізок KB у 3 рази коротший за відрізок AK. Знайти довжину відрізка AK.

А	Б	В	Г	Д
3 см	4 см	6 см	8 см	9 см

2. Промені OK і OL проходять між сторонами прямого кута AOB, $\angle AOL = 80^\circ$, $\angle BOK = 50^\circ$. Знайти градусну міру кута KOL.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	40°	50°

3. Якою не може бути назва кута, зображеного на малюнку?



А	Б	В	Г	Д
$\angle KOM$	$\angle MOL$	$\angle KON$	$\angle LOK$	$\angle LOM$

4. Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін дорівнює 110°. Знайти градусну міру даного кута.

А	Б	В	Г	Д
70°	90°	110°	140°	інша відповідь

5. Один із суміжних кутів на 10° менший за інший. Знайти градусну міру меншого із суміжних кутів.

А	Б	В	Г	Д
85°	80°	75°	70°	65°

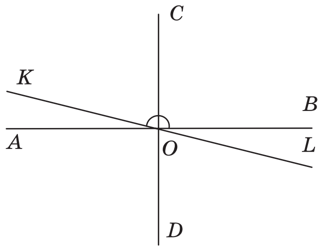
6. Величини двох із чотирьох кутів, що утворися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайти кут між прямими.

А	Б	В	Г	Д
70°	100°	90°	80°	85°

7. Чому дорівнює кут між бісектрисами вертикальних кутів?

А	Б	В	Г	Д
60°	90°	120°	180°	неможливо визначити

8. Прямі AB і CD перпендикулярні (малюнок) і перетинаються в точці O, $\angle BOK = 160^\circ$. Знайти градусну міру кута DOL.

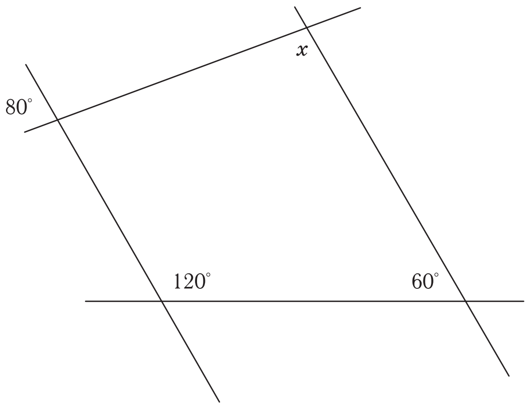


А	Б	В	Г	Д
70°	60°	50°	40°	інша відповідь

9. Один із кутів, які утворились при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 40°. Якому значенню із запропонованих може дорівнювати один із решти семи кутів?

А	Б	В	Г	Д
150°	140°	60°	50°	10°

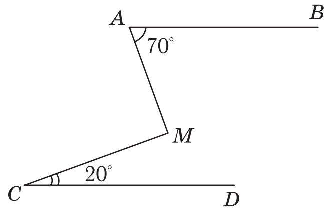
10. Знайти значення кута x за даними малюнка.



А	Б	В	Г	Д
60°	80°	100°	120°	70°

11. Точки A, B і C лежать на одній прямій, $AB = 7$ см, $BC = 5$ см. Якою найменшою (у см) може бути відстань між точками A і C?

12. На малюнку прямі AB і CD паралельні. Знайти градусну міру кута AMC.

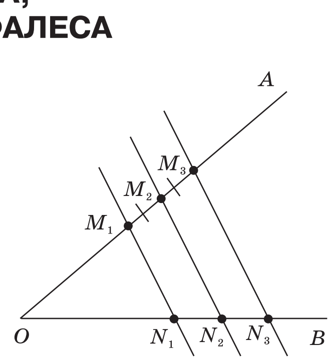


§ 6. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА, УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

1. Теорема Фалеса

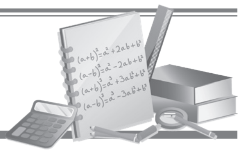
Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на іншій його стороні.

На *малюнку 184* прямі M_1N_1, M_2N_2 і M_3N_3 попарно паралельні і $M_1M_2 = M_2M_3$. Тоді за теоремою Фалеса: $N_1N_2 = N_2N_3$.



мал. 184

Зміст



Геометрія