

Шановні старшокласники!

Результати Державної підсумкової атестації (ДПА) та зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) вкрай важливі для старшокласників. Сподіваюся, що посібник, який ви тримаєте в руках, допоможе якісно підготуватися до ЗНО та отримати гарну оцінку з ДПА і високий рейтинговий бал ЗНО.

Посібник охоплює матеріал шкільного курсу математики 5–11 класів. Теоретичний матеріал посібника, зразки розв'язування вправ, завдання для самостійного виконання складено відповідно до чинних програм для закладів загальної середньої освіти та програми ЗНО з математики. Усі завдання, які розв'язано в посібнику і які запропоновано для самостійного виконання, є типовими та аналогічними до тих, що використовувалися протягом останніх років для проведення ЗНО.

Розглянемо типи завдань, які традиційно пропонують на ЗНО.

1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді. Завдання складається з основи та п'яти варіантів відповіді, з яких лише один правильний. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання вибрав і позначив відповідь у бланку відповідей А.

2. Завдання на встановлення відповідності («логічні пари»). Завдання складається з основи та двох стовпчиків інформації, позначених цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Виконання завдання передбачає встановлення відповідності (утворення «логічних пар») між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання зробив позначки на перетинах рядків (цифри від 1 до 3) і колонок (букви від А до Д) у таблиці бланка відповідей А.

3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю:

– **структуроване**, складається з основи та двох частин і передбачає розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання, зробивши відповідні числові розрахунки, записав, дотримуючись вимог і правил, відповіді до кожної із частин завдання в бланку відповідей А;

– **неструктуроване**, складається з основи та передбачає розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання, зробивши відповідні числові розрахунки, записав, дотримуючись вимог і правил, кінцеву відповідь у бланку відповідей А.

Під час виконання цих завдань потрібно отримати числовий результат тієї розмірності, яку вказано в умові. Цей результат є цілим числом або скінченним десятковим дробом.

4. Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Завдання складається з основи та передбачає розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання в бланку відповідей В (а для профільного рівня - і у бланку відповідей В) навів усі етапи розв'язання та обґрунтував їх, зробив посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження, проілюстрував розв'язання задачі рисунками, графіками тощо.

Весь матеріал посібника поділено на 24 теми з алгебри і початків аналізу та 14 тем з геометрії. Кожна тема теоретичного матеріалу містить одне-два завдання для самостійного розв'язання, що допоможе вам зрозуміти, чи добре засвоєно теоретичний матеріал.

У свою чергу, кожне з цих завдань містить два однотипних варіанти (їх позначено літерами А і Б, наприклад, «Вправа 1А» та «Вправа 1Б»). За наявності часу, наприклад, якщо ви почали готуватися до ЗНО на початку 10 класу, автор пропонує розв'язувати обидва ці варіанти. Якщо ж часу для підготовки до ЗНО замало, – хоча б один з них. Загалом у посібнику подано 30 вправ з алгебри і початків аналізу та 16 вправ з геометрії, кожна з яких, як зазначено вище, у двох варіантах.

Вправи, що відповідають програмі з математики 5–9 класів, містять такі типи завдань:

1.1–1.6. Завдання з вибором однієї правильної відповіді.

2.1. Завдання на встановлення відповідності.

3.1. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю – структуроване завдання.

4.1–4.3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю – неструктуроване завдання.

Вправи, що відповідають програмі з математики 10–11 класів, крім вказаних вище типів, містять ще й такий тип завдання:

5.1–5.2. Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

Указаний розподіл завдань в цілому відповідає характеристиці сертифікаційної роботи ЗНО з математики, що використовується в останні роки в Україні.

У кінці посібника наведено два тренувальних тести у форматі ЗНО та відповіді до всіх вправ та тренувальних тестів посібника.

Шановні вчителі!

Сподіваюся, що запропонований посібник допоможе вам у підготовці випускників до складання ЗНО обох рівнів: рівня стандарту та профільного. Маю надію, що посібник стане в пригоді як під час групових (класних, факультативних), так і під час індивідуальних занять.

Посібник допоможе узагальнити й систематизувати навчальний матеріал курсу математики 5–11 класів та підготувати учнів безпосередньо до складання іспитів у форматі ЗНО.

Якщо Ви працюєте за *рівнем стандарту (3 год на тиждень)*, то підготувати учнів до складання ЗНО непросто. Тому автор щиро сподівається, що адміністрація навчального закладу за рахунок варіативної частини навчального плану школи надасть ще одну, а краще дві години, яку вчителі зможуть використати саме для підготовки до ЗНО. Посібник допоможе швидко і якісно повторити теоретичний матеріал відповідної теми (учні можуть це зробити як самостійно, так і під керівництвом учителя). А далі можна під керівництвом учителя (наприклад, під час класної роботи) розв'язати вправу з позначкою «А», а вправу з позначкою «Б» запропонувати учням для самостійного розв'язання (наприклад як домашнє завдання).

Якщо Вам пощастило працювати на *профільному рівні (9 год на тиждень)*, то важливо правильно спланувати резервний час програми з математики. Автор пропонує використовувати резервний час (а можливо, ще й додаткові години варіативної складової навчального плану) саме для ефективної підготовки до ЗНО та діяти так, як запропоновано в попередньому абзаці.

Автор сподівається, що посібник буде дуже корисний і для вчителів, що проводять *індивідуальні заняття*. Залежно від регламенту заняття (45 хв, 60 хв, 90 хв, 120 хв тощо) учитель зможе знайти розумний «баланс» між теоретичною частиною теми (пояснити її учню або запропонувати йому ознайомитися з теоретичним матеріалом самостійно) і практичним наповненням теми (вправа «А»). При цьому вправу «Б» доцільно запропонувати учневі як домашнє завдання.

Маю надію, що майже 30-річний досвід роботи автора посібника у звичайних та профільних класах, досвід проведення індивідуальних занять, написання підручників та посібників для учнів та вчителів 5–11 класів, який враховано під час підготовки посібника, допоможе як старшокласникам, так і вчителям.

З повагою автор

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ТЕМА 1. Раціональні числа та дії над ними

§ 1. НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

• Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., які використовують для лічби предметів, називають *натуральними числами*. Позначають множину натуральних чисел буквою N .

• Із двох натуральних чисел, що мають різну кількість цифр, більшим є те, у якого цифр більше. Наприклад, $2171 > 975$; $4135 < 11\,297$.

Із двох натуральних чисел, що мають однакову кількість цифр, більшим є те, у якого більше одиниць у найвищому розряді.

Наприклад: $7982 < 8001$; $52\,711 > 49\,917$.

Із двох натуральних чисел, що мають однакову кількість цифр і однакову цифру в найвищому розряді, більшим є те, у якого більше одиниць у наступному, нижчому, розряді і т.д.

Наприклад: $25\,719 > 24\,132$; $1319 < 1327$.

• При *округленні натурального числа* до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри заміняють нулями, а також:

а) якщо першою наступною за цим розрядом цифрою є 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю;

б) якщо першою наступною за цим розрядом цифрою є 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, що залишилася, не змінюють.

Наприклад, округлення до тисяч: $4502 \approx 5000$; $72\,132 \approx 72\,000$;

округлення до сотень: $7825 \approx 7800$; $9875 \approx 9900$.

Зразки розв'язування завдань

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. Укажіть правильне округлення до сотень.

А	Б	В	Г	Д
$2560 \approx 2500$	$2751 \approx 2800$	$2839 \approx 3000$	$2739 \approx 2740$	$2762 \approx 2700$

Розв'язання. $2751 \approx 2800$.

Відповідь. Б.

§ 2. ПОДІЛЬНІСТЬ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

• Якщо натуральне число a ділиться на натуральне число b без остачі, то число a називають *кратним* числу b , а b – *дільником* a . Наприклад, 24 – кратне числу 4, а 27 – не кратне числу 6; 8 – дільник числа 32, а 7 не є дільником числа 41.

• *Ознаки подільності*:

на 2 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується однією з таких цифр 0, 2, 4, 6 або 8;

на 5 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0 або 5;

на 10 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0;

на 3 діляться всі ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 3;

на 9 діляться всі ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9.

• Натуральне число називають *простим*, якщо воно має тільки два різних дільники: одиницю і саме це число. Натуральне число називають *складеним*, якщо воно має більше двох дільників.

Наприклад, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13 – прості, а числа 4, 9, 38, 105 – складені.

Число 1 не є ні простим, ні складеним.

• Будь-яке складене число можна *розкласти на прості множники*. Наприклад,

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7; \quad 450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5; \quad 858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13.$$

• Найбільше натуральне число, на яке діляться числа a і b , називають *найбільшим спільним дільником* (НСД) цих чисел. Щоб знайти НСД двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і знайти добуток спільних простих множників.

Приклад. Знайдіть НСД (420; 980).

Розв'язання.

420	<u>2</u>	980	<u>2</u>
210	<u>2</u>	490	<u>2</u>
105	3	245	<u>5</u>
35	<u>5</u>	49	<u>7</u>
7	<u>7</u>	7	7
1		1	

$$\text{НСД (420; 980)} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140.$$

- Два натуральних числа називають *взаємно простими*, якщо їх НСД дорівнює 1.
- Найменше натуральне число, яке ділиться на числа a і b , називають *найменшим спільним кратним* (НСК) цих чисел. Щоб знайти НСК двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і доповнити розклад першого з них простими множниками з розкладу інших чисел, яких не вистачає в розкладі першого, після чого знайти добуток отриманих множників.

$$\text{НСК (420; 980)} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}_{420} \cdot 7 = 2940.$$

- Якщо при діленні натурального числа a на натуральне число b отримали частку q і остачу r , то $a = bq + r$, де $r < b$.

При цьому q називають *неповною часткою*.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 119 \overline{) 13} \\ - 117 \overline{) 9} \\ \hline 2 \text{ (остача)} \end{array} \quad 119 = 13 \cdot 9 + 2.$$

Зразки розв'язування завдань

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. У коробці лежить не більше 50 цукерок. Їх можна порівну розділити між двома або трьома дітьми, але не можна між чотирма. Яка найбільш можлива кількість цукерок може бути в коробці?

А	Б	В	Г	Д
40	42	46	48	50

Розв'язання. Кількість цукерок у коробці має бути кратною числу 2 і числу 3, тобто кратною числу 6, але не кратною числу 4. Серед запропонованих чисел у варіантах А–Д таким є число 42.

Відповідь. Б.

2. Якою цифрою із запропонованих треба замінити «зірочку» у записі числа $\overline{1234*}$, щоб це число було кратним числу 3?

А	Б	В	Г	Д
0	6	7	8	9

Розв'язання. Сума відомих цифр числа: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Якщо до числа 10 додати 8, то отримаємо число 18, що є кратним числу 3. Отже, «зірочку» треба замінити на цифру 8.

Відповідь. Г.

Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

3. Знайдіть найменше спільне кратне чисел 56, 70 і 84.

Розв'язання. $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$; $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

Тоді $\text{НСК (56; 70; 84)} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7}_{56} \cdot 5 \cdot 3 = 840$.

Відповідь. 8 4 0

§ 3. ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ

• Частку від ділення числа a на число b можна записати у вигляді *звичайного дробу* $\frac{a}{b}$, де a – чисельник дробу, b – його знаменник.

• *Правильним дробом* називають дріб, у якого чисельник менший від знаменника. Значення правильного дробу менше від 1.

• *Неправильним дробом* називають дріб, у якого чисельник більший за знаменник або дорівнює йому. Значення неправильного дробу не менше від 1.

• З неправильного дробу можна виділити цілу і дробову частини (отримати *мішане* або *натуральне число*).

$$\text{Наприклад, 1) } \begin{array}{r} 19 \\ -15 \\ \hline 4 \end{array} \begin{array}{l} | 5 \\ | 3 \end{array} \quad \text{Отже, } \frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}; \quad 2) \begin{array}{r} 23 \\ -21 \\ \hline 2 \end{array} \begin{array}{l} | 3 \\ | 7 \end{array} \quad \text{Отже, } \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

4 (остача) 2 (остача)

• Мішане або натуральне число можна подати у вигляді неправильного дробу.

$$\text{Наприклад, } 5\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{16}{3}; \quad 12 = \frac{12 \cdot 4}{4} = \frac{48}{4}.$$

• *Основна властивість дробу*: значення дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число.

$$\text{Наприклад, } \frac{16}{20} = \frac{16:4}{20:4} = \frac{4}{5} \text{ (скоротили дріб на 4); } \quad \frac{60}{84} = \frac{60:12}{84:12} = \frac{5}{7} \text{ (скоротили дріб на 12);}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15} \text{ (звели дріб } \frac{4}{5} \text{ до знаменника 15);}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{30}{70} \text{ (звели дріб } \frac{3}{7} \text{ до знаменника 70).}$$

• З двох дробів з однаковими знаменниками більшим є той, чисельник якого більший.

$$\text{Наприклад, } \frac{5}{9} > \frac{4}{9}; \quad \frac{1}{11} < \frac{3}{11}.$$

• Щоб порівняти два дроби з різними знаменниками, достатньо звести їх до спільного знаменника і порівняти дроби, що при цьому утворилися.

Приклад. Порівняємо дроби $\frac{5}{6}$ і $\frac{7}{8}$. Для цього зведемо їх до знаменника 24.

$$\text{Маємо: } \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}; \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}. \text{ Оскільки } \frac{20}{24} < \frac{21}{24}, \text{ то } \frac{5}{6} < \frac{7}{8}.$$

• Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають за формулами:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

$$\text{Наприклад, } \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{6}{11}; \quad \frac{7}{13} - \frac{2}{13} = \frac{5}{13}.$$

• Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, краще до найменшого, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

$$\text{Наприклад, } \frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}; \quad \frac{3}{8} - \frac{2}{12} = \frac{15-8}{24} = \frac{7}{24}.$$

• Як виконувати додавання і віднімання мішаних чисел, розглянемо на прикладах:

$$4\frac{3}{8} + 2\frac{8}{3} = 6\frac{21+8}{24} = 6\frac{29}{24} = 7\frac{5}{24}; \quad 5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6} = 4\frac{4-1}{6} = 4\frac{3}{6} = 4\frac{1}{2};$$

$$12\frac{2}{5} - 3\frac{7}{10} = 11 + 1\frac{2}{10} - 3\frac{7}{10} = (11 - 3) + \left(1\frac{2}{10} - \frac{7}{10}\right) = 8 + \frac{12}{10} - \frac{7}{10} = 8 + \frac{5}{10} = 8\frac{5}{10} = 8\frac{1}{2}.$$

• Щоб помножити два дробу, треба помножити окремо їх чисельники і знаменники й перший добуток записати чисельником, а другий – знаменником.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\text{Наприклад, } \frac{7}{8} \cdot \frac{20}{21} = \frac{\cancel{7}^1 \cdot \cancel{20}^5}{\cancel{8}_2 \cdot \cancel{21}_3} = \frac{5}{6}; \quad 14 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3};$$

$$3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{7} = \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{7} = \frac{\cancel{7}^1 \cdot \cancel{8}^4}{\cancel{2}_1 \cdot \cancel{7}_1} = \frac{4}{1} = 4.$$

• Щоб поділити один дріб на другий, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника, тобто

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\text{Наприклад, } \frac{3}{8} : \frac{7}{16} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{7} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{16}^2}{\cancel{8}_1 \cdot 7} = \frac{6}{7}; \quad 4\frac{1}{2} : 2\frac{5}{6} = \frac{9}{2} : \frac{17}{6} = \frac{9 \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{2}_1 \cdot 17} = \frac{27}{17} = 1\frac{10}{17}; \quad \frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{7 \cdot 2} = \frac{5}{14}.$$

Зразки розв'язування завдань

Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

1. Через першу трубу басейн заповнюється водою за 72 хв, а через другу – за 90 хв. За який час (у хв) заповниться басейн, якщо ці дві труби відкрити одночасно?

Розв'язання. За 1 хв перша труба заповнює $\frac{1}{72}$ частину басейну, а друга – $\frac{1}{90}$. Працюючи

разом протягом 1 хв вони заповнять $\frac{1}{72} + \frac{1}{90} = \frac{5+4}{360} = \frac{9}{360} = \frac{1}{40}$ частину басейну. Отже, весь басейн через ці дві труби заповниться за 40 хв.

Відповідь. 40.

Вправа 1А

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

- 1.1. Обчисліть $12 + 88 : 4 - 5$.

А	Б	В	Г	Д
29	30	20	39	28

- 1.2. Укажіть найбільший спільний дільник чисел 24 і 36.

А	Б	В	Г	Д
1	6	12	24	72

- 1.3. Якою цифрою із запропонованих можна замінити «зірочку» у числовій нерівності $47*2 < 4751$, щоб вона була правильною?

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

- 1.4. Якою цифрою із запропонованих треба замінити «зірочку» у числі $45 * 1$, щоб воно ділилося на 3 без остачі?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

- 1.5. Будівельна компанія придбала для нового будинку металопластикові вікна і двері, причому вікон було придбано у 3 рази більше, ніж дверей. Укажіть число, якому може дорівнювати загальна кількість вікон і дверей у цьому будинку.

А	Б	В	Г	Д
103	104	106	109	110

- 1.6. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3} < \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} > \frac{5}{6}$	$\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$	$\frac{7}{8} > \frac{9}{10}$	$\frac{14}{15} < \frac{9}{10}$

Завдання на встановлення відповідності

- 2.1. Установіть відповідність між числовим виразом (1–3) та його значенням (А–Д).

Числовий вираз

Значення виразу

1 $3\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6}$

А 2

2 $1\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{11}$

Б $2\frac{1}{4}$

3 $5\frac{1}{24} : 1\frac{5}{6}$

В $2\frac{1}{2}$

Г $2\frac{3}{4}$

Д $2\frac{7}{8}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Структуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

- 3.1. 1. Знайдіть найбільше натуральне трицифрове число, яке кратне числам 3, 7 та 13.

Відповідь. ,

2. Яку частку отримаємо при діленні цього числа на 21?

Відповідь. ,

Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

- 4.1. Знайдіть найменше спільне кратне чисел 48, 60 і 72.

Відповідь. ,

- 4.2. Знайдіть значення виразу $\left(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{18} - 2\frac{1}{4}$.

Відповідь. ,

- 4.3. Один з операторів комп'ютерного набору може набрати певний рукопис, працюючи самостійно, за 30 днів, а інший – за 60 днів. За скільки днів виконають набір рукопису оператори, працюючи разом?

Відповідь. ,

Вправа 1Б

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

- 1.1. Укажіть значення виразу $15 + 60 : 3 - 9$.

А	Б	В	Г	Д
20	16	24	28	26

- 1.2. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел 45 і 60.

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	15	180

- 1.3. Якою з наведених цифр можна замінити «зірочку» у запису $58 * 7 > 5879$, щоб утворилася правильна нерівність?

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	4	0

- 1.4. Якою цифрою треба замінити «зірочку» у числі $73 * 5$, щоб воно ділилося на 9 без остачі?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	6	9

- 1.5. Марічка зліпила вареники з вишнями та з картоплею, причому вареників з вишнями в 4 рази більше, ніж з картоплею. Укажіть число, якому може дорівнювати загальна кількість вареників.

А	Б	В	Г	Д
63	72	45	37	91

- 1.6. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3} > \frac{2}{5}$	$\frac{4}{7} < \frac{9}{14}$	$\frac{1}{2} > \frac{11}{20}$	$\frac{4}{15} > \frac{3}{10}$	$\frac{3}{4} < \frac{5}{8}$

Завдання на встановлення відповідності

- 2.1. Установіть відповідність між числовим виразом (1–3) та його значенням (А–Д).

Числовий вираз

- 1 $2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8}$
 2 $1\frac{9}{20} \cdot 2\frac{1}{2}$
 3 $4\frac{1}{5} : 1\frac{2}{5}$

Значення виразу

- А 3
 Б $3\frac{1}{2}$
 В $3\frac{3}{8}$
 Г $3\frac{3}{4}$
 Д $3\frac{5}{8}$

А Б В Г Д

1					
2					
3					

Структуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

3.1. 1. Знайдіть найменше натуральне чотирицифрове число, яке кратне числам 3, 5 та 11.

Відповідь. ,

2. Яку частку отримаємо при діленні цього числа на 15?

Відповідь. ,

Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

4.1. Знайдіть найменше спільне кратне чисел 50, 60 і 75.

Відповідь. ,

4.2. Знайдіть значення виразу $2\frac{3}{8} : \frac{9}{16} \cdot \left(4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{19}\right) - 4\frac{1}{3}$.

Відповідь. ,

4.3. Майстриня художнього розпису та її учениця, працюючи разом, виконують певну роботу за 20 год. Працюючи самостійно, майстриня може виконати цю роботу за 36 год. За скільки годин може виконати цю роботу самостійно її учениця?

Відповідь. ,

§ 4. ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ

• Звичайний дріб, знаменником якого є розрядна одиниця 10, 100, 1000 тощо, можна записати десятковим дробом. Наприклад, $\frac{9}{10} = 0,9$; $\frac{17}{100} = 0,17$; $\frac{257}{1000} = 0,257$. Якщо в чисельнику звичайного дробу цифр менше, ніж нулів у знаменнику, то в десятковому дробі після коми дописують нулів стільки, щоб кількість цифр після коми дорівнювала кількості нулів у знаменнику звичайного дробу.

Наприклад, $\frac{23}{1000} = 0,023$; $\frac{7}{10\,000} = 0,0007$.

Так само у вигляді десяткового дробу можна записувати і мішані числа: $5\frac{7}{10} = 5,7$; $2\frac{47}{1000} = 2,047$.

• З двох десяткових дробів більшим є той, у якого більша ціла частина. Якщо цілі частини дробів рівні, то більший той, у якого більше десятих, і так само далі.

Наприклад, $17,3 < 18,17$; $13,4 > 13,2$; $7,435 > 7,429$.

• При округленні десяткового дробу до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями або відкидають (якщо вони стоять після коми). Якщо першою наступною за цим розрядом цифрою є 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилася, збільшують на 1. Якщо першою наступною за цим розрядом цифрою є 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, що залишилася, не змінюють.

Наприклад, округлення до сотих: $4,735 \approx 4,74$; $9,1249 \approx 9,12$; округлення до десятків: $317,98 \approx 320$; $413,29 \approx 410$.

• Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно, записуючи їх один під одним так, щоб кома розміщувалася під комою. Якщо в якомусь розряді немає одиниць, на місці цього розряду записуємо нуль.

Наприклад,	$\begin{array}{r} 4,73 \\ + 5,20 \\ \hline 9,93 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12,370 \\ - 3,798 \\ \hline 8,572 \end{array}$
------------	--	--

• Щоб помножити два десяткових дроба, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити комою справа стільки цифр, скільки їх після коми в обох множниках разом. Наприклад:

Наприклад,	$\begin{array}{r} 5,08 \\ \times 3,7 \\ \hline 3556 \\ + 1524 \\ \hline 18,796 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,013 \\ \times 0,8 \\ \hline 0,0104 \end{array}$
------------	---	---

ГЕОМЕТРІЯ

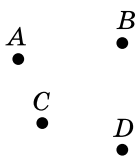
ТЕМА 1. Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості

§ 1. ТОЧКА, ПРЯМА

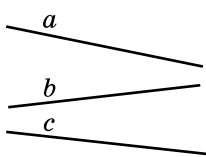
• Основними геометричними фігурами на площині є *точка* і *пряма*. Точки позначають великими латинськими буквами $A, B, C, D, \dots$ (мал. 1), прямі – маленькими латинськими буквами $a, b, c, \dots$ (мал. 2).

На малюнку 3 зображено пряму t і точки A, B і C . Точки B і C *лежать* на прямій t (це записують так: $B \in t, C \in t$); точка A *не лежить* на прямій t (це записують так: $A \notin t$). Кажуть також, що точки B і C *належать* прямій t , а точка A *не належить* прямій t .

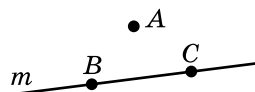
Яка б не була пряма, існують точки, що належать прямій, і точки, що їй не належать.



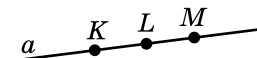
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

• Через точки B і C , які належать прямій t , провести жодної іншої прямої, яка б не збігалася з прямою t , не можна.

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

• Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад B і C , можна записати двома буквами BC або CB .

На малюнку 3: $A \notin t, B \in t, C \in t$. Про такі три точки кажуть, що вони *не лежать на одній прямій*. На малюнку 4 точки K, L і M лежать на одній прямій a , причому точка L лежить між точками K і M .

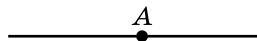
З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

§ 2. ПРОМІНЬ

• Проведемо пряму і позначимо на ній точку A (мал. 5). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожен з яких разом з точкою A називають *променем*. Точка A – *початок* кожного з променів.

Промінь позначають двома великими латинськими буквами. На першому місці пишуть початок променя, на другому – деяку точку променя. Наприклад, на малюнку 6 зображено промінь OM .

• Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*. На малюнку 7 зображено доповняльні промені KL і KM .



Мал. 5



Мал. 6



Мал. 7

§ 3. ВІДРІЗОК

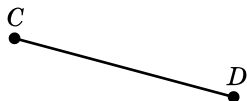
• **Відрізком** називають частину прямої, яка складається з двох точок прямої (кінців відрізка) та всіх точок цієї прямої, що лежать між цими двома її точками. Ці точки називають *кінцями відрізка*.

На малюнку 8 зображено відрізок CD , точки C і D – його кінці.

• Для вимірювання відрізків треба мати *одичинний відрізок* (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

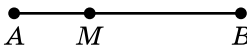
Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

• На малюнку 9 точка M належить відрізку AB , а точка N – не належить відрізку AB . Точка M ділить відрізок AB на два відрізки AM і MB . При цьому $AB = AM + MB$.



Мал. 8

• N



Мал. 9

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його точка.

Приклад. Точка M належить відрізку AB , довжина якого дорівнює 9 см. Визначте довжини відрізків AM і MB , якщо MB довший за AM удвічі.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 9. Нехай довжина відрізка $AM = x$ см, тоді $MB = 2x$ см. Оскільки $AB = AM + MB$, то маємо рівняння $2x + x = 9$, звідки $x = 3$ (см). Отже, $AM = 3$ см, $MB = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

- Довжину відрізка називають також *відстанню між його кінцями*.
- Точку відрізка, яка ділить його навпіл, називають *серединою відрізка*.

Зразки розв'язування завдань

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. Точка M ділить відрізок AB завдовжки 14 см у відношенні 2 : 5, рахуючи від точки A . Знайдіть довжину відрізка AM .

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	8 см	10 см	12 см

Розв'язання. Розглянемо малюнок 9. Оскільки $AM : MB = 2 : 5$, то позначимо $AM = 2x$ см, $MB = 5x$ см. Маємо $2x + 5x = 14$, звідки $x = 2$ (см). Тоді $AM = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

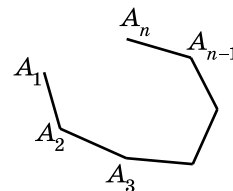
Відповідь. Б.

§ 4. ЛАМАНА

• *Ламаною* $A_1A_2A_3\dots A_n$ називають фігуру, яка складається з точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ і відрізків $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, що сполучають ці точки (мал. 10). Точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *вершинами* ламаної, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ – *ланками* ламаної.

• *Довжиною ламаної* називають суму довжин її ланок.

Довжина ламаної не менша від довжини відрізка, що сполучає її кінці.

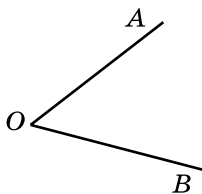


Мал. 10

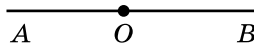
§ 5. КУТ

• **Кут** – це геометрична фігура, що складається з точки і двох променів, які виходять із цієї точки (мал. 11). Промені називають *сторонами кута*, а їх спільний початок – *вершиною кута*.

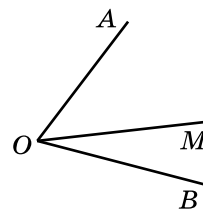
На малюнку 11 OA і OB – сторони кута, точка O – вершина кута. Цей кут можна позначити так: $\angle O$, або $\angle AOB$, або $\angle BOA$. У двох останніх варіантах назву вершини кута записують посередині.



Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13

• **Розгорнутий кут** – це кут, сторони якого є доповняльними променями (мал. 12).

Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° .

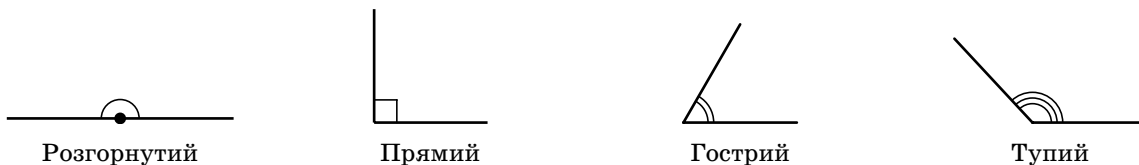
• На малюнку 13 промінь OM ділить кут AOB на два кути: AOM і MOB . Можна помітити, що $\angle AOB = \angle AOM + \angle MOB$.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його розбиває будь-який промінь, що проходить між його сторонами.

Приклад. Промінь OM проходить між сторонами кута AOB (мал. 13). $\angle MOB = \frac{1}{3}\angle AOB$, $\angle AOM = 52^\circ$. Знайдіть градусну міру кута AOB .

Розв'язання. Нехай $\angle MOB = x$, тоді $\angle AOB = 3x$. Оскільки $\angle AOB = \angle AOM + \angle MOB$, то маємо рівняння: $52^\circ + x = 3x$. Звідси $x = 26^\circ$. Тоді $\angle AOB = 3 \cdot 26^\circ = 78^\circ$.

• Розрізняють такі види кутів: *розгорнутий* (його градусна міра дорівнює 180°), *прямий* (його градусна міра дорівнює 90°), *гострий* (його градусна міра менша від 90°), *тупий* (його градусна міра більша за 90° , але менша від 180°). Ці кути зображено на малюнку 14.



Мал. 14

Зразки розв'язування завдань

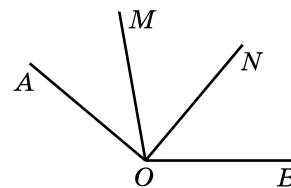
Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. Прямі OM і ON проходять між сторонами кута AOB (мал. 15), $\angle NOA = 90^\circ$, $\angle MOB = 100^\circ$. Знайдіть градусну міру кута MON , якщо $\angle AOB = 140^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	40°	50°

Розв'язання. $\angle AOM = \angle AOB - \angle MOB = 140^\circ - 100^\circ = 40^\circ$. Тоді $\angle MON = \angle AON - \angle AOM = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

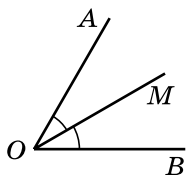
Відповідь. Д.



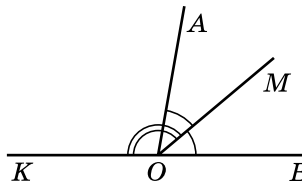
Мал. 15

§ 6. БІСЕКТРИСА КУТА

• **Бісектрисою кута** називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить його на два рівних кути.
На малюнку 16 OM – бісектриса кута AOB .



Мал. 16



Мал. 17

Приклад. Який кут утворює бісектриса кута градусної міри 80° з продовженням однієї з його сторін?

Розв'язання. OM – бісектриса кута AOB , $\angle AOB = 80^\circ$ (мал. 17). Тоді $\angle MOB = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

А тому $\angle KOM = 180^\circ - \angle MOB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Відповідь. 140° .

Зразки розв'язування завдань

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. Промінь OM – бісектриса кута AOB . Знайдіть градусну міру кута AOB , якщо $\angle MOB = 26^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
13°	26°	52°	62°	інша відповідь

Розв'язання. $\angle AOB = 2 \cdot \angle MOB = 2 \cdot 26^\circ = 52^\circ$.

Відповідь. В.

§ 7. СУМІЖНІ КУТИ

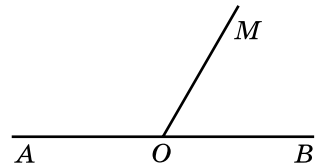
• Два кути називають **суміжними**, якщо одна сторона в них спільна, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 18 кути $\angle AOM$ і $\angle MOB$ – суміжні.

• **Властивість суміжних кутів:** сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Приклад. Знайдіть градусні міри суміжних кутів, якщо вони відносяться як 2 : 3.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 18. Нехай $\angle MOB : \angle AOM = 2 : 3$, тоді позначимо $\angle MOB = 2x$, $\angle AOM = 3x$. За властивістю суміжних кутів $2x + 3x = 180^\circ$, звідки $5x = 180^\circ$, $x = 36^\circ$. Тоді $\angle MOB = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$, $\angle AOM = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$.



Мал. 18

Зразки розв'язування завдань**Завдання з вибором однієї правильної відповіді**

1. Один із суміжних кутів на 50° більший за інший. Знайдіть менший із суміжних кутів.

А	Б	В	Г	Д
50°	60°	65°	75°	115°

Розв'язання. Нехай $\angle BOM = x$, тоді $\angle AOM = x + 50^\circ$ (мал. 18). За властивістю суміжних кутів маємо $x + x + 50^\circ = 180^\circ$, звідки $x = 65^\circ$. Отже, $\angle BOM = 65^\circ$.

Відповідь. В.

§ 8. ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ. КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

• Два кути називають **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

На малюнку 19 прямі AB і CD перетинаються в точці O . Утворилося дві пари вертикальних кутів: $\angle AOC$ і $\angle BOD$ та $\angle AOD$ і $\angle BOC$.

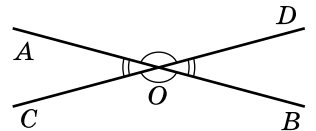
• **Властивість вертикальних кутів:** вертикальні кути рівні.

• **Кутом між прямими**, що перетинаються, називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

Приклад. Прямі AB і CD перетинаються в точці O (мал. 19), $\angle AOD = 160^\circ$. Знайдіть кут між прямими.

Розв'язання. $\angle AOC = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$. Отже, кут між прямими дорівнює 20° .

Відповідь. 20° .



Мал. 19

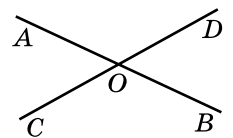
Зразки розв'язування завдань**Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю**

1. Два із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 3 : 7. Знайдіть (у градусах) найбільший з утворених кутів.

Розв'язання. Нехай $\angle AOC = 3x$, $\angle AOD = 7x$ (мал. 20). За властивістю суміжних кутів маємо рівняння: $3x + 7x = 180^\circ$, звідки $x = 18^\circ$.

Тоді $\angle AOD = 7 \cdot 18^\circ = 126^\circ$.

Відповідь. 126° .



Мал. 20

§ 9. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

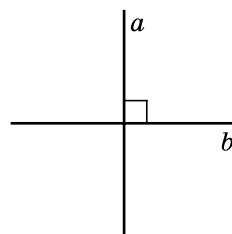
• Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На малюнку 21 прямі a і b перпендикулярні, це записують так: $a \perp b$.

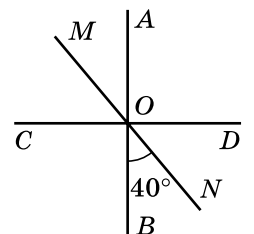
Приклад. Прямі AB , CD і MN перетинаються в точці O , причому $AB \perp CD$ (мал. 22). Знайдіть $\angle MOD$, якщо $\angle BON = 40^\circ$.

Розв'язання. $\angle MOA = \angle BON = 40^\circ$ (як вертикальні).

Тоді $\angle MOD = \angle MOA + \angle AOD = 40^\circ + 90^\circ = 130^\circ$.



Мал. 21



Мал. 22

• *Перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого – дана точка, а другий – точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають відстанню від точки до прямої.*

На малюнку 23 відрізок MA – перпендикуляр, проведений з точки M до прямої a . Точку A при цьому називають основою перпендикуляра.

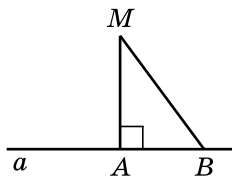
• Нехай точка B – довільна точка прямої a , відмінна від A . Відрізок MB називають похилою, проведеною з точки M до прямої a , точку B називають основою цієї похилої, а відрізок AB – проекцією похилої.

• *Властивості перпендикуляра і похилої.*

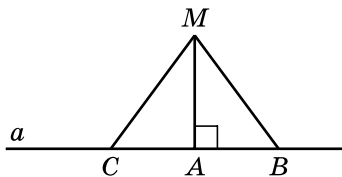
1) *Перпендикуляр, проведений з даної точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної із цієї самої точки до прямої.*

На малюнку 23: $AM < MB$.

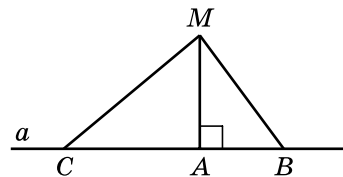
2) *Якщо дві похилі, проведені до прямої з даної точки, рівні, то рівні і їх проекції.*



Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25

На малюнку 24: $MA \perp a$, $MB = MC$. Тому $BA = AC$.

3) *Якщо дві похилі, проведені до прямої з даної точки, мають рівні проекції, то вони між собою рівні.*

На малюнку 24: $MA \perp a$, $BA = AC$. Тому $MB = MC$.

4) *Якщо з даної точки до прямої проведено дві похилі, то більша похила має більшу проекцію на цю пряму.*

На малюнку 25: $MA \perp a$, $MC > MB$. Тому $AC > AB$.

5) *Якщо з даної точки до прямої проведено дві похилі, то більшою з них є та, яка має більшу проекцію на дану пряму.*

На малюнку 25: $MA \perp a$, $AC > AB$. Тому $MC > MB$.

Зразки розв'язування завдань

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. З точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі, відстань між основами яких дорівнює 12 см. Знайдіть довжину проекції однієї з похилих.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	6 см	12 см

Розв'язання. $MC = MB$ (мал. 24), тому $CA = AB = \frac{12}{2} = 6$ (см).

Відповідь. Г.

§ 10. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

• Дві прямі на площині називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

На малюнку 26 прямі a і b паралельні (це записують так: $a \parallel b$).

• Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає основну властивість паралельних прямих.

a

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

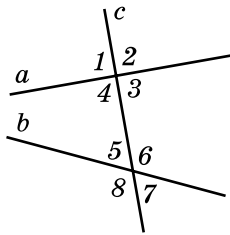
b

Цю аксіому називають аксіомою паралельності прямих або аксіомою Евкліда.

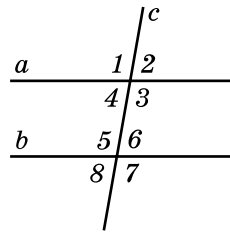
Мал. 26

• Розглянемо кути, що утворилися при перетині прямих a і b січною c (мал. 27). Деякі пари кутів мають спеціальні назви.

Зокрема, внутрішні односторонні кути – це кути 4 і 5, 3 і 6;



Мал. 27



Мал. 28

внутрішні різносторонні куты — це куты 4 і 6, 3 і 5;
відповідні куты — це куты 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8.

- Нехай прямі a і b перетинає січна c (мал. 28).

Ознака паралельності прямих. Якщо при перетині двох прямих січною відповідні куты між собою рівні, то прямі паралельні.

Якщо, наприклад, $\angle 1 = \angle 5$, то $a \parallel b$ (мал. 28).

Наслідок 1. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні куты між собою рівні, то прямі паралельні.

Якщо, наприклад, $\angle 4 = \angle 6$, то $a \parallel b$ (мал. 28).

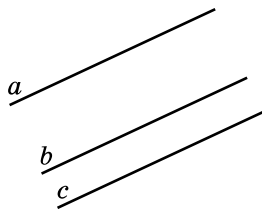
Наслідок 2. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то прямі паралельні.

Якщо, наприклад, $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, то $a \parallel b$ (мал. 28).

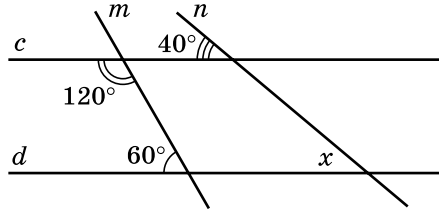
- Розглянемо властивості паралельних прямих.

1) Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

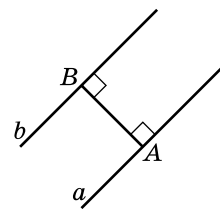
На малюнку 29: $a \parallel b$ і $b \parallel c$, тому $a \parallel c$.



Мал. 29



Мал. 30



Мал. 31

2) Відповідні куты, що утворилися на перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.

Нехай $a \parallel b$, c — січна (мал. 28). Тоді, наприклад, $\angle 1 = \angle 5$.

3) Внутрішні різносторонні куты, що утворилися на перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.

Нехай $a \parallel b$, c — січна (мал. 28). Тоді, наприклад, $\angle 4 = \angle 6$.

4) Сума внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися на перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180° .

Нехай $a \parallel b$, c — січна (мал. 28). Тоді, наприклад, $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$.

Приклад. Знайдіть кут x на малюнку 30.

Розв'язання. $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. Оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині прямих c і d січною m , дорівнює 180° , то $c \parallel d$.

При перетині паралельних прямих c і d січною n відповідні куты рівні. Тому $x = 40^\circ$.

- Відстанню між паралельними прямими називають довжину їх спільного перпендикуляра.

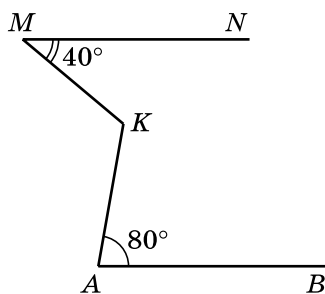
На малюнку 31 прямі a і b паралельні; $AB \perp a$; $AB \perp b$; $A \in a$; $B \in b$. Тоді довжина відрізка AB є відстанню між прямими a і b .

Зразки розв'язування завдань

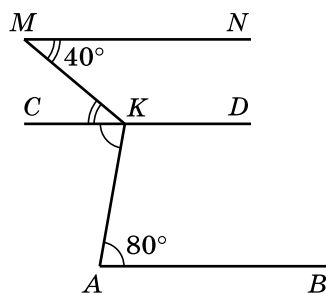
Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

1. На малюнку 32 $MN \parallel AB$. Знайдіть градусну міру кута $МКА$.

Розв'язання. 1) Проведемо через точку K пряму CD , паралельну прямій AB (мал. 33).



Мал. 32



Мал. 33

2) $\angle CKM = \angle KMN$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих CD і MN і січній MK). Тому $\angle CKM = 40^\circ$.

3) $CD \parallel MN$, $MN \parallel AB$. Тому $CD \parallel AB$ (за ознакою паралельності прямих).

4) $\angle CKA = \angle KAB$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих CD і AB і січній KA). Тому $\angle CKA = 80^\circ$.

5) Тоді $\angle MKA = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$.

Відповідь. 120° .

§ 11. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

• **Теорема Фалеса.** Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

На малюнку 34 прямі M_1N_1 , M_2N_2 і M_3N_3 – паралельні, $M_1M_2 = M_2M_3$. Тоді $N_1N_2 = N_2N_3$ (за теоремою Фалеса).

• **Узагальнена теорема Фалеса.** Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від його сторін пропорційні відрізки.

На малюнку 35 прямі K_1L_1 , K_2L_2 і K_3L_3 – паралельні. Тоді

$$\frac{K_1K_2}{L_1L_2} = \frac{K_2K_3}{L_2L_3}.$$

Із цієї пропорції можна дійти висновку, що:

$$\frac{K_1K_2}{K_2K_3} = \frac{L_1L_2}{L_2L_3} \text{ і } \frac{K_1K_2}{K_1K_3} = \frac{L_1L_2}{L_1L_3}.$$

Приклад. Паралельні прямі K_1L_1 , K_2L_2 і K_3L_3 перетинають сторони кута (мал. 35), $K_1K_2 = 4$ см, $K_2K_3 = 6$ см, $L_2L_3 = 9$ см. Знайдіть L_1L_3 .

Розв'язання. Маємо: $\frac{K_1K_2}{L_1L_2} = \frac{K_2K_3}{L_2L_3}$, тобто $\frac{4}{L_1L_2} = \frac{6}{9}$.

Звідси $L_1L_2 = 6$ (см), тоді $L_1L_3 = 6 + 9 = 15$ (см).

Зразки розв'язування завдань

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. На малюнку 34 прямі M_1N_1 , M_2N_2 і M_3N_3 – паралельні, $M_1M_2 = M_2M_3$, $M_1M_2 : N_1N_2 = 5 : 3$, $M_2M_3 - N_2N_3 = 4$ см. Знайдіть M_1M_2 .

А	Б	В	Г	Д
10 см	8 см	6 см	4 см	2 см

Розв'язання. За теоремою Фалеса маємо: $N_1N_2 = N_2N_3$.

Оскільки $M_1M_2 : N_1N_2 = 5 : 3$, то позначимо $M_1M_2 = M_2M_3 = 5x$, $N_1N_2 = N_2N_3 = 3x$.

Оскільки $M_2M_3 - N_2N_3 = 4$ (см), то маємо рівняння $5x - 3x = 4$, з якого $x = 2$.

Отже, $M_1M_2 = 5 \cdot 2 = 10$ (см).

Відповідь. А.

Вправа 1А

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

- 1.1. Точка P ділить відрізок CD завдовжки 40 см у відношенні 3 : 7, починаючи від точки C . Знайдіть довжину відрізка PD .

А	Б	В	Г	Д
4 см	12 см	16 см	28 см	32 см

- 1.2. Промінь OK – бісектриса кута AOB . Знайдіть градусну міру кута AOK , якщо $\angle AOB = 36^\circ$.

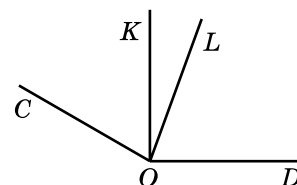
А	Б	В	Г	Д
18°	36°	72°	16°	інша відповідь

- 1.3. Один із суміжних кутів на 30° менший від іншого. Знайдіть більший із суміжних кутів.

А	Б	В	Г	Д
75°	95°	105°	115°	125°

- 1.4. Промені OK і OL проходять між сторонами кута COD , який дорівнює 150° (мал. 36), $\angle KOL = 20^\circ$, $\angle KOD = 90^\circ$. Знайдіть градусну міру кута COL .

А	Б	В	Г	Д
60°	70°	75°	80°	85°



Мал. 36

- 1.5. З однієї точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Проекція однієї з похилих на цю пряму дорівнює 8 см. Знайдіть відстань між основами похилих.

А	Б	В	Г	Д
4 см	8 см	12 см	16 см	24 см

- 1.6. На малюнку 34 прямі M_1N_1 , M_2N_2 і M_3N_3 – паралельні, $M_1M_2 = M_2M_3$, $M_1M_2 : N_1N_2 = 7 : 5$, $M_2M_3 - N_2N_3 = 6$ (см). Знайдіть N_2N_3 .

А	Б	В	Г	Д
3 см	6 см	9 см	12 см	15 см

Завдання на встановлення відповідності

- 2.1. На малюнку 37 прямі AK , BL і CM – паралельні, $OK = 6$ см, $KL = 7,5$ см, $AB = 5$ см, $BC = 3$ см. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Д).

Відрізок

Довжина

1 OA

А 4 см

2 LM

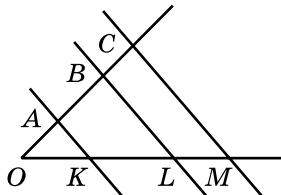
Б 4,5 см

3 KM

В 6 см

Г 9 см

Д 12 см



Мал. 37

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Структуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

- 3.1. Відомо, що $\angle ABC : \angle KLM = 1 : 3$, а сума кутів, суміжних з ними, дорівнює 200° .

1. Знайдіть градусну міру кута ABC .

Відповідь.

2. Який кут (у градусах) утворює бісектриса кута KLM з його стороною?

Відповідь. ,

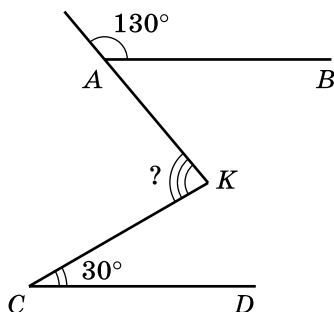
Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

4.1. Два із чотирьох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайдіть (у градусах) кут між прямими.

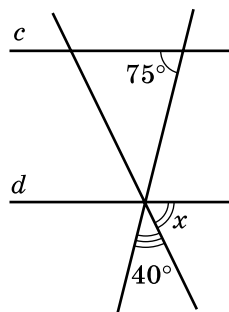
Відповідь. ,

4.2. На малюнку 38 прямі AB і CD паралельні. Знайдіть градусну міру кута AKC .

Відповідь. ,



Мал. 38



Мал. 39

4.3. Прямі c і d паралельні (мал. 39). Знайдіть градусну міру кута x .

Відповідь. ,

Вправа 1Б

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

1.1. Точка A ділить відрізок MN у відношенні 3 : 5, починаючи від точки M . Знайдіть довжину відрізка AN , якщо $MN = 24$ см.

А	Б	В	Г	Д
3 см	6 см	9 см	15 см	18 см

1.2. Промінь OM – бісектриса кута COD . Знайдіть градусну міру кута COD , якщо $\angle COM = 50^\circ$.

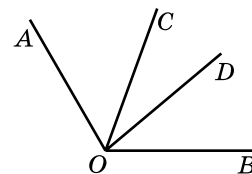
А	Б	В	Г	Д
20°	25°	50°	90°	100°

1.3. Один із суміжних кутів на 70° більший за інший. Знайдіть менший із суміжних кутів.

А	Б	В	Г	Д
45°	55°	65°	75°	125°

1.4. Промені OC і OD проходять між сторонами кута AOB (мал. 40), $\angle COD = 30^\circ$, $\angle COB = 70^\circ$, $\angle AOD = 80^\circ$. Знайдіть $\angle AOB$.

А	Б	В	Г	Д
110°	120°	125°	130°	140°



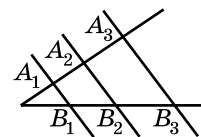
Мал. 40

1.5. З однієї точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Відстань між основами цих похилих дорівнює 12 см. Знайдіть проекції похилих на цю пряму.

А	Б	В	Г	Д
4 см і 8 см	12 см і 12 см	6 см і 6 см	6 см і 12 см	24 см і 24 см

- 1.6. На малюнку 41 прямі A_1B_1 , A_2B_2 і A_3B_3 – паралельні, $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 5$, $A_1A_2 + B_1B_2 = 16$ см. Знайдіть A_2A_3 .

А	Б	В	Г	Д
4 см	6 см	8 см	10 см	12 см



Мал. 41

Завдання на встановлення відповідності

- 2.1. На малюнку 42 прямі AB , CD і KL – паралельні, $OB = 4$ см, $DL = 6$ см, $AC = 10$ см, $CK = 12$ см. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Д).

Відрізок

Довжина відрізка

1 OA

А 5 см

2 BD

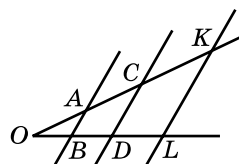
Б 8 см

3 OD

В 9 см

Г 12 см

Д 18 см



Мал. 42

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Структуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

- 3.1. Відомо, що $\angle ABC : \angle MNK = 4 : 1$, а різниця кутів, суміжних з ними, дорівнює 60° .

1. Знайдіть градусну міру кута MNK .

Відповідь. ,

2. Який кут (у градусах) утворює бісектриса кута ABC з його стороною?

Відповідь. ,

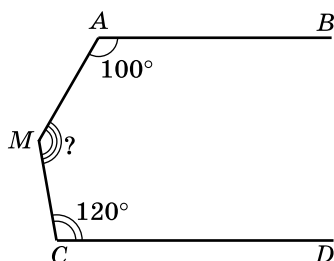
Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю

- 4.1. Один з кутів, які утворилися на перетині двох прямих, утричі більший за інший. Знайдіть (у градусах) кут між прямими.

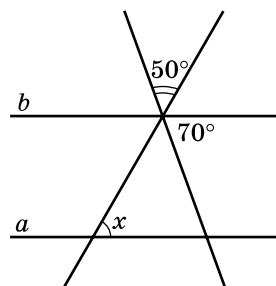
Відповідь. ,

- 4.2. На малюнку 43 прямі AB і CD паралельні. Знайдіть градусну міру кута AMC .

Відповідь. ,



Мал. 43



Мал. 44

- 4.3. На малюнку 44 прямі a і b паралельні. Знайдіть градусну міру кута x .

Відповідь. ,

ЗМІСТ

Шановні старшокласники!	3	Тема 7. Раціональний дріб	48
Шановні вчителі!	4	§ 1. Раціональний дріб. Основна властивість дробу	48
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ		§ 2. Правила виконання арифметичних дій з алгебраїчними дробами	49
Тема 1. Раціональні числа та дії над ними	5	Вправа 8А	52
§ 1. Натуральні числа	5	Вправа 8Б	53
§ 2. Подільність натуральних чисел	5	Тема 8. Арифметичний квадратний корінь	55
§ 3. Звичайні дроби	7	§ 1. Арифметичний квадратний корінь	55
Вправа 1А	8	§ 2. Дії з арифметичними квадратними коренями. Тотожні перетворення виразів, що містять арифметичні квадратні корені	56
Вправа 1Б	10	Вправа 9А	59
§ 4. Десяткові дроби	11	Вправа 9Б	60
§ 5. Додатні та від'ємні числа	13	Тема 9. Квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до квадратних. Теорема Вієта. Квадратний тричлен. Розв'язування текстових задач за допомогою квадратних і дробових раціональних рівнянь	62
§ 6. Цілі числа, раціональні числа, ірраціональні числа	14	§ 1. Квадратне рівняння	62
Вправа 2А	14	§ 2. Теорема Вієта	64
Вправа 2Б	16	§ 3. Квадратний тричлен	65
Тема 2. Розв'язування текстових задач арифметичними способами	17	Вправа 10А	66
§ 1. Найпростіші задачі на рух	17	Вправа 10Б	67
§ 2. Середня швидкість руху	17	§ 4. Дробове раціональне рівняння	69
§ 3. Задачі на рух по воді	18	§ 5. Розв'язування рівнянь методом розкладання многочлена на множники	70
§ 4. Задачі, пов'язані з вартістю товару	18	§ 6. Бікватратне рівняння. Метод заміни змінної	71
§ 5. Задачі на роботу	18	§ 7. Розв'язування текстових задач за допомогою квадратних і дробових раціональних рівнянь	72
§ 6. Знаходження дробу від числа	19	§ 8. Найпростіші рівняння з параметром	74
§ 7. Знаходження числа за його дробом	20	Вправа 11А	76
Вправа 3А	20	Вправа 11Б	77
Вправа 3Б	22	Тема 10. Рівняння з двома змінними та їх системи. Застосування систем рівнянь для розв'язування текстових задач	79
Тема 3. Відношення. Пропорція. Відсотки	24	§ 1. Загальні відомості про рівняння з двома змінними	79
§ 1. Відношення. Пропорція	24	§ 2. Загальні відомості про системи рівнянь з двома змінними	79
§ 2. Пряма пропорційна залежність	25	§ 3. Методи розв'язування систем рівнянь з двома змінними	80
§ 3. Поділ числа у даному відношенні	25	§ 4. Застосування систем рівнянь для розв'язування текстових задач	82
§ 4. Відсотки. Основні види задач на відсотки	26	§ 5. Розв'язування систем рівнянь з параметрами	83
Вправа 4А	27	Вправа 12А	83
Вправа 4Б	28	Вправа 12Б	85
Тема 4. Степінь з натуральним і цілим показниками. Одночлен	30	Тема 11. Числові проміжки. Нерівності. Лінійні нерівності. Системи нерівностей	87
§ 1. Степінь з натуральним показником	30	§ 1. Числові проміжки	87
§ 2. Одночлен	30	§ 2. Загальні відомості про нерівності	88
§ 3. Степінь із цілим показником	31	§ 3. Лінійна нерівність з однією змінною. Нерівності, що зводяться до лінійних	88
Вправа 5А	33	§ 4. Системи нерівностей з однією змінною	90
Вправа 5Б	34	Вправа 13А	91
Тема 5. Многочлен	35	Вправа 13Б	92
§ 1. Зведення подібних доданків	35	Тема 12. Функція. Лінійне рівняння з двома змінними	93
§ 2. Многочлен	36		
§ 3. Формули скороченого множення	37		
§ 4. Розкладання многочленів на множники	38		
Вправа 6А	39		
Вправа 6Б	40		
Тема 6. Рівняння. Лінійні рівняння. Розв'язування текстових задач за допомогою лінійних рівнянь	42		
§ 1. Загальні відомості про рівняння	42		
§ 2. Лінійні рівняння та рівняння, що зводяться до лінійних	42		
§ 3. Розв'язування текстових задач за допомогою лінійних рівнянь	44		
Вправа 7А	45		
Вправа 7Б	46		

§ 1. Основні відомості про функцію	93
§ 2. Парність і непарність функції	95
§ 3. Лінійна функція	96
§ 4. Лінійне рівняння з двома змінними	98
Вправа 14А	99
Вправа 14Б	100
§ 5. Функція $y = \frac{k}{x}$	101
§ 6. Функція $y = x^2$	102
§ 7. Функція $y = \sqrt{x}$	103
§ 8. Функція $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$	103
§ 9. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень	104
Вправа 15А	105
Вправа 15Б	107

Тема 13. Квадратні нерівності. Метод інтервалів.

Рівняння та нерівності, що містять змінну під знаком модуля	108
§ 1. Квадратні нерівності	108
§ 2. Метод інтервалів	110
§ 3. Найпростіші рівняння, що містять змінну під знаком модуля	111
§ 4. Найпростіші нерівності, що містять змінну під знаком модуля	112
Вправа 16А	113
Вправа 16Б	114

Тема 14. Числові послідовності 115

§ 1. Числові послідовності	115
§ 2. Арифметична прогресія	116
§ 3. Геометрична прогресія	118
§ 4. Нескінченна спадна геометрична прогресія	116
Вправа 17А	120
Вправа 17Б	121

Тема 15. Арифметичний корінь n -го степеня 122

§ 1. Арифметичний корінь n -го степеня	122
§ 2. Дії з арифметичними коренями n -го степеня. Тотожні перетворення виразів, що містять корені n -го степеня	124
§ 3. Порівняння дійсних чисел	126
Вправа 18А	127
Вправа 18Б	128

Тема 16. Степінь з раціональним показником.

Степенева функція	130
§ 1. Степінь з раціональним показником	130
§ 2. Степенева функція	132
Вправа 19А	134
Вправа 19Б	136

Тема 17. Ірраціональні рівняння 138

§ 1. Ірраціональні рівняння	138
§ 2. Ірраціональні рівняння з параметром	141
§ 3. Системи ірраціональних рівнянь	138
§ 4. Ірраціональні нерівності	138
§ 5. Ірраціональні нерівності з параметром	138
Вправа 20А	142
Вправа 20Б	144

Тема 18. Тригонометричні функції числового аргументу 145

§ 1. Градусна і радіанна міри кута	145
------------------------------------	-----

§ 2. Означення тригонометричної функції кута та числового аргументу	146
§ 3. Тригонометричні функції деяких кутів	147
§ 4. Періодичність тригонометричних функцій	148
§ 5. Тригонометричні функції та їх графіки	148
§ 6. Властивості тригонометричних функцій	149
§ 7. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу	151
Вправа 21А	153
Вправа 21Б	154
§ 8. Формули зведення	156
§ 9. Формули додавання	157
§ 10. Формули подвійного кута	158
§ 11. Формули пониження степеня	159
§ 12. Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій	160
Вправа 22А	161
Вправа 22Б	162

Тема 19. Тригонометричні рівняння 164

§ 1. Арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс числа	164
§ 2. Найпростіші тригонометричні рівняння	165
§ 3. Рівняння, що зводяться до найпростіших	168
§ 4. Методи розв'язування тригонометричних рівнянь	169
§ 5. Тригонометричні рівняння з параметром	172
§ 6. Системи тригонометричних рівнянь	165
§ 7. Найпростіші тригонометричні нерівності	165
Вправа 23А	173
Вправа 23Б	175

Тема 20. Показникова функція. Показникові

рівняння і нерівності	177
§ 1. Показникова функція	177
§ 2. Показникові рівняння	178
§ 3. Показникові нерівності	181
Вправа 24А	183
Вправа 24Б	184

Тема 21. Логарифм. Логарифмічна функція.

Логарифмічні рівняння і нерівності	186
§ 1. Логарифм	186
§ 2. Логарифмічна функція	189
Вправа 25А	191
Вправа 25Б	192
§ 3. Логарифмічні рівняння	194
§ 4. Логарифмічні нерівності	197
§ 5. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності з параметром	199
§ 6. Системи показникових і логарифмічних рівнянь	197
§ 7. Системи показникових і логарифмічних рівнянь з параметром	197
Вправа 26А	202
Вправа 26Б	203

Тема 22. Похідна функції та її застосування 205

§ 1. Означення похідної, таблиця похідних, правила знаходження похідних	205
§ 2. Похідна функції в точці	206
§ 3. Похідна складеної функції	206
§ 4. Геометричний і фізичний зміст похідної. Рівняння дотичної до графіка функції в даній точці	207
Вправа 27А	209
Вправа 27Б	211

§ 5. Знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції за допомогою похідної	212
§ 6. Застосування похідної для дослідження властивостей функції та побудови її графіка	214
§ 7. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку	215
Вправа 28А	215
Вправа 28Б	217

Тема 23. Первісна та визначений інтеграл 218

§ 1. Означення первісної. Основна властивість первісних	218
§ 2. Таблиця первісних. Правила знаходження первісних	219
§ 3. Визначений інтеграл. Формула Ньютона–Лейбніца	221
§ 4. Обчислення площі криволінійної трапеції та площ плоских фігур	223
§ 5. Переміщення матеріальної точки, що рухається прямолінійно	226
Вправа 29А	226
Вправа 29Б	228

Тема 24. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики 230

§ 1. Комбінаторні правило суми і правило добутку	230
§ 2. Означення факторіала	230
§ 3. Перестановки	231
§ 4. Розміщення	231
§ 5. Комбінації (сполучення)	232
§ 6. Випадкова подія. Ймовірність випадкової події	233
§ 7. Елементи статистики	235
Вправа 30А	236
Вправа 30Б	238

ГЕОМЕТРИЯ

Тема 1. Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості 240

§ 1. Точка, пряма	240
§ 2. Промінь	240
§ 3. Відрізок	240
§ 4. Ламана	241
§ 5. Кут	241
§ 6. Бісектриса кута	242
§ 7. Суміжні кути	243
§ 8. Вертикальні кути. Кут між прямими	243
§ 9. Перпендикулярні прямі. Перпендикуляр і похила	243
§ 10. Паралельні прямі	244
§ 11. Теорема Фалеса. Узагальнена теорема Фалеса	246
Вправа 1А	247
Вправа 1Б	248

Тема 2. Трикутники 250

§ 1. Трикутник, елементи трикутника. Ознаки рівності трикутників	250
§ 2. Медіана, бісектриса, висота трикутника	251
§ 3. Сума кутів трикутника	253
§ 4. Зовнішній кут трикутника	254
§ 5. Нерівність трикутника	254
§ 6. Середня лінія трикутника	255
Вправа 2А	256
Вправа 2Б	257
§ 7. Прямокутний трикутник	258

§ 8. Пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику	260
§ 9. Співвідношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику	261
§ 10. Теорема косинусів. Теорема синусів	262
Вправа 3А	264
Вправа 3Б	265

Тема 3. Чотирикутники 267

§ 1. Чотирикутник, його елементи	267
§ 2. Паралелограм	267
§ 3. Прямокутник	268
Вправа 4А	270
Вправа 4Б	271
§ 4. Ромб	272
§ 5. Квадрат	273
§ 6. Трапеція	274
Вправа 5А	276
Вправа 5Б	278

Тема 4. Многокутники. Площі многокутників.

Подібність трикутників 279

§ 1. Многокутник	279
§ 2. Правильний многокутник	280
§ 3. Площі многокутників	281
§ 4. Подібність фігур	284
Вправа 6А	286
Вправа 6Б	287

Тема 5. Коло і круг 289

§ 1. Коло, круг, їх елементи	289
§ 2. Центральні та вписані кути	291
§ 3. Вписані та описані многокутники	293
Вправа 7А	295
Вправа 7Б	296

Тема 6. Координати і вектори на площині 298

§ 1. Прямокутна система координат на площині. Координати точки на площині	298
§ 2. Найпростіші задачі у прямокутній системі координат на площині	298
§ 3. Рівняння кола і рівняння прямої на площині	299
§ 4. Вектори на площині	301
§ 5. Координати вектора на площині. Дії над векторами, заданими координатами	303
§ 6. Скалярний добуток векторів	304
Вправа 8А	306
Вправа 8Б	307

Тема 7. Прямі та площини у просторі 309

§ 1. Основні поняття стереометрії	309
§ 2. Взаємне розміщення двох прямих у просторі	309
§ 3. Взаємне розміщення прямої і площини	310
§ 4. Взаємне розміщення двох площин	312
§ 5. Паралельне проектування	313
§ 6. Перпендикулярність прямих у просторі	314
§ 7. Перпендикулярність прямої і площини	315
§ 8. Перпендикуляр і похила	316
§ 9. Теорема про три перпендикуляри	317
Вправа 9А	318
Вправа 9Б	320

Тема 8. Відстані та кути у просторі 322

§ 1. Відстані у просторі	322
§ 2. Кути у просторі	324
Вправа 10А	327

Вправа 10Б	328
Тема 9. Многогранники. Призма. Паралелепіпед	330
§ 1. Многогранники	330
§ 2. Призма	330
§ 3. Паралелепіпед	335
Вправа 11А	337
Вправа 11Б	338
Тема 10. Піраміда	340
§ 1. Піраміда	330
§ 2. Зрізана піраміда	330
Вправа 12А	344
Вправа 12Б	346
Тема 11. Циліндр. Комбінації призми і циліндра	347
§ 1. Тіла і поверхні обертання	347
§ 2. Циліндр	347
§ 3. Комбінації призми і циліндра	354
Вправа 13А	350
Вправа 13Б	352
Тема 12. Конус. Зрізаний конус. Комбінації піраміди і конуса	347
§ 1. Конус	354
§ 2. Зрізаний конус	357
§ 3. Комбінації піраміди і конуса	358
Вправа 14А	360
Вправа 14Б	362

Тема 13. Куля. Сфера. Комбінації многогранника і кулі	347
§ 1. Куля. Сфера	354
§ 2. Взаємне розміщення кулі і площини	357
§ 3. Комбінації многогранника і кулі	358
Вправа 15А	360
Вправа 15Б	362
Тема 14. Координати і вектори у просторі	363
§ 1. Прямокутна система координат у просторі, координати точки у просторі	363
§ 2. Найпростіші задачі у прямокутній системі координат у просторі	364
§ 3. Координати вектора у просторі. Дії над векторами, заданих координатами	366
§ 4. Скалярний добуток векторів у просторі	367
§ 5. Симетрія відносно точки та симетрія відносно площини	369
Вправа 16А	369
Вправа 16Б	370

ТРЕНУВАЛЬНІ ТЕСТИ

Тренувальний тест № 1 у форматі ЗНО	373
Тренувальний тест № 2 у форматі ЗНО	381
Відповіді до вправ	389
Відповіді до Тренувального тесту № 1	394
Відповіді до Тренувального тесту № 2	395