

ПЕРЕДМОВА

Задачі з параметрами, яким присвячено цей посібник, є природним завершенням будь-якого параграфу (пункту) підручника, у якому йдеться про розв'язування рівнянь, нерівностей, систем. Такі задачі є відносно важкими в логічній (ідейній) частині та / або технічній частині їх розв'язування, тому здобувачі освіти традиційно мають проблеми під час розв'язування таких задач.

На жаль, насиченість програми з алгебри для 7–9 класів не дає змоги приділити достатньо уваги на уроках задачам із параметрами. Розуміючи це, один із авторів цього посібника у своїй модельній навчальній програмі «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти відніс задачі з параметрами до *додаткових тем*, і сподівається, що за наявності досить великої кількості годин (3 або більше) на вивчення алгебри учитель / учителька зможе розглядати деякі із задач із параметрами на уроках.

У пропонованому посібнику вивчення параметрів починається із самого початку, з найпростішого і охоплює не лише теми, зазначені в авторській модельній навчальній програмі, а й багато інших, які належать до 7–9 класів.

Автори сподіваються, що пропонований посібник буде корисним:

- під час групової та індивідуальної роботи вчителям / учителькам, які працюють за модельною навчальною програмою з алгебри (автор Істер О. С.), як складова *навчально-методичного комплексу до авторських підручників*;

- усім учителям / учителькам, незалежно від того, за якою МНП проводиться навчання, для роботи на уроках та індивідуальної роботи, зокрема для підготовки до ЗНО / НМТ;

- здобувачам освіти для покращення своїх знань і самостійної підготовки до ЗНО / НМТ.

Посібник складається з окремих уроків, яких 28. Час, який потрібен для опрацювання цих уроків, досить різний (залежно від теми, кількості розглянутих вправ та інших критеріїв). До всіх уроків, крім першого, подано вправи для самостійного виконання; у кінці посібника до всіх прав наведено відповіді.

Автори сподіваються, що така побудова посібника буде зручною для всіх його користувачів.

Один з авторів підготував повну добірку відеоуроків за темами посібника. Ці уроки можна переглянути за посиланням <https://surl.lu/wjemhb> або QR-кодом



Урок 1. ВСТУП. ОСНОВНІ ТИПИ І ВИДИ ЗАДАЧ

Зазвичай у рівняннях, нерівностях, системах, завданнях, що пов'язані з функціями, літерами позначають змінні. Але іноді, крім змінної, вони можуть містити ще й іншу літеру, якою позначено невідоме стале число. Цю літеру називають *параметром*, а задачі, що її містять, – *задачами з параметром*.

У такому разі ми маємо вже не одну задачу, а багато задач, які отримуємо для різних значень параметра. Водночас задача для деяких значень параметра може не мати розв'язків, для деяких значень параметра мати єдиний розв'язок, а для деяких – безліч розв'язків тощо.

Усі задачі з параметром умовно можна поділити на **два типи**, залежно від вимоги до задачі.

Якщо потрібно розв'язати рівняння (нерівність, систему рівнянь тощо) для кожного допустимого значення параметра, то такий тип задач назвемо **тип 1**.

Розв'язати рівняння (нерівність, систему рівнянь тощо) **з параметром** означає для кожного значення параметра встановити, чи має це рівняння розв'язки, і якщо так, то знайти ці розв'язки, які в більшості випадків залежатимуть від параметра.

Зауважимо, що важливо для таких задач правильно записати відповідь, і цей процес аж ніяк не формальний. У задачах першого типу всі знайдені значення параметра та відповідні їм розв'язки у відповіді до задачі записують зазвичай у такому вигляді: «Якщо ..., то ...». Відсутність у відповіді хоча б одного значення параметра з його області визначення означатиме, що деякі випадки існування розв'язків не розглянуто, тому відповідь вважається неповною.

Будь-яка задача з параметрами є по-своєму унікальною, тому універсальних методів розв'язування таких задач не існує. Можна лише зазначити певні дії, без виконання яких розв'язання задач з параметром не буде успішним. Наприклад, якщо поставлено вимогу розв'язати рівняння, то спочатку знаходять область визначення параметра (якщо вона відмінна від множини всіх дійсних чисел), потім досліджують усі можливі випадки існування коренів, знаходячи значення параметра для кожного із цих випадків та відповідні їм корені. Усі знайдені значення параметра та відповідні їм корені записують у відповіді до задачі, як було вже зазначено, у форматі: «Якщо ..., то ...».

Задачі першого типу в ЗНО / НМТ трапляються лише в завданнях відкритої форми, тобто в тих завданнях, які перевіряє вчитель.

Якщо потрібно знайти значення параметра, для якого рівняння (нерівність, система рівнянь тощо) задовольняє певну умову – найчастіше це вимога щодо кількості або числових значень його розв'язків, то такий тип задач назвемо **тип 2**. І тут відповідь записують у вигляді $a = \dots$ або a належить певному проміжку тощо.

Задачі другого типу в ЗНО / НМТ трапляються і в завданнях відкритої форми, і в завданнях з короткою відповіддю.

У задачах параметр позначають літерою a , а в задачах, які мають два параметри, – літерами a і b .

Цей посібник присвячено задачам з параметрами вказаних двох типів.

Серед типів задач з параметрами є ще й види задач, зокрема – лінійні рівняння, квадратні рівняння, системи лінійних рівнянь та ін. Маючи два типи задач з параметрами, доходимо висновку, що можна розглядати лінійні рівняння з параметрами першого типу, лінійні рівняння з параметрами другого типу, квадратні рівняння з параметрами першого типу, квадратні рівняння з параметрами другого типу і т. д.

Крім того, задачі з параметрами, як і будь-які математичні задачі, можна класифікувати за методами їх розв’язування. У цьому посібнику ми розглянемо основні методи розв’язування задач з параметрами. Зауважимо, що методи розв’язування задач з параметрами можна умовно поділити на дві великі групи: аналітичні та графічні. Прикладами аналітичних методів зокрема є застосування теореми Вієта для коренів квадратного рівняння, розташування коренів квадратного рівняння відносно числа тощо; прикладами графічних методів є паралельне перенесення графіка функції вздовж осі абсцис (або ординат), побудова графіка в системі координат $(x; a)$ тощо.

Ще один вид класифікації задач з параметрами можна виокремити залежно від ролі параметра в завданні. Параметр може бути «активним», тобто впливати на кількість розв’язків, самі розв’язки тощо, а також «пасивним» (хоч як це дивно, таке теж буває), тобто коли відповідь задачі не залежить від параметра. Тоді відповідь до задачі зазначають у такому форматі: «для всіх значень параметра a $x_1 = a$, $x_2 = 5$ » або « $x_1 = a$, $x_2 = 5$ для всіх значень параметра a ». Задачі з «пасивним» параметром є відносно простими, проте, починаючи розв’язувати такі задачі, далеко не завжди можна передбачити роль параметра. Задачі з «пасивним» параметром розглянемо на наступному уроці, усі інші уроки буде присвячено задачам з активним параметром.

Урок 2. «ПАСИВНИЙ» ПАРАМЕТР

Розглянемо на цьому уроці приклади задач з параметрами, у яких роль параметра є «пасивною».

Приклад 1. Для всіх значень параметра a розв’яжіть рівняння

$$2x - 7 = 4(x - a).$$

Розв’язання. Це рівняння, яке зводиться до лінійного, можна розв’язувати так само, як і подібні рівняння, які не містять параметра.

$$2x - 7 = 4x - 4a; 4x - 2x = 4a - 7; 2x = 4a - 7.$$

Оскільки коефіцієнт біля змінної x дорівнює числу 2 і не залежить від параметра, то для всіх значень параметра a матимемо $x = \frac{4a - 7}{2}$.

Відповідь: $\frac{4a - 7}{2}$ для всіх значень a .

Приклад 2. Для всіх значень параметрів a і b розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x + y = 3a, \\ 4x - y = 9b. \end{cases}$$

Розв'язання. Задану в умові систему доцільно розв'язувати способом додавання. Додавши почленно рівняння системи, матимемо:

$$6x = 3a + 9b; x = \frac{3(a + 3b)}{6}; x = \frac{a + 3b}{2}.$$

Знайдемо відповідне значення y . Маємо:

$$2 \cdot \frac{a + 3b}{2} + y = 3a; a + 3b + y = 3a; y = 2a - 3b.$$

Отже, для всіх значень параметрів a і b маємо $x = \frac{a + 3b}{2}$, $y = 2a - 3b$.

Відповідь: $x = \frac{a + 3b}{2}$, $y = 2a - 3b$ для всіх значень a і b .

Приклад 3. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння

$$x^2 + (a - 1)x - (6a^2 + 3a) = 0.$$

Розв'язання. Оскільки коефіцієнт біля x^2 дорівнює 1, то задане рівняння є квадратним для всіх значень параметра a .

Знайдемо його дискримінант. Маємо:

$$D = (a - 1)^2 + 4(6a^2 + 3a) = a^2 - 2a + 1 + 24a^2 + 12a = 25a^2 + 10a + 1.$$

У подібних завданнях після знаходження дискримінанта варто відповісти на питання: «Чи є дискримінант повним квадратом?». Оскільки

$$25a^2 + 10a + 1 = (5a + 1)^2, \text{ то маємо } \sqrt{D} = \sqrt{(5a + 1)^2} = |5a + 1|.$$

Оскільки під час розкриття модуля перед виразом ставлять один зі знаків «+» або «-» і у формулі коренів квадратного рівняння

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ перед виразом } \sqrt{D} \text{ також стоїть один зі знаків «+» або}$$

«-», то рівняння закінчуємо в такий спосіб:

$$x_1 = \frac{-(a - 1) + (5a + 1)}{2} = \frac{4a + 2}{2} = \frac{2(2a + 1)}{2} = 2a + 1;$$

$$x_2 = \frac{-(a - 1) - (5a + 1)}{2} = \frac{-6a}{2} = -3a.$$

Отже, для всіх значень параметра a матимемо $x_1 = 2a + 1$, $x_2 = -3a$.

Відповідь: $x_1 = 2a + 1$, $x_2 = -3a$ для всіх значень параметра a .

ВПРАВИ

1. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння $5(x - 1) = 2x + a$.

2. Для всіх значень параметра a розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 7a, \\ 3x - y = 8a. \end{cases}$$

ВПРАВИ

1. За яких значень параметра a рівняння $ax^2 + 4x + 16$ має єдиний корінь?
2. За яких значень параметра a рівняння $(a + 1)x^2 + (2a - 1)x + a = 0$ має два різних дійсних корені?
3. За яких значень параметра a рівняння $(a + 3)x^2 + (2a + 6)x + 1 = 0$:
1) має єдиний корінь; 2) не має коренів?
4. За яких значень параметра a рівняння $(a - 1)x^2 - x\sqrt{4 + 3a - a^2} - 1 = 0$ має: 1) єдиний корінь; 2) два різних дійсних корені?

Урок 14. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ (ТИП 2). ТЕОРЕМА ВІЄТА

Упродовж цього уроку розглянемо квадратні рівняння з параметрами другого типу, під час розв'язування яких використовується теорема Вієта.

Нагадаємо її:

Якщо x_1 та x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

Якщо x_1 та x_2 – корені незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Треба зауважити, що рівності, які виражають залежність суми і добутку коренів квадратного рівняння (їх ще називають *формулами Вієта*) від коефіцієнтів «працюють» лише у разі наявності коренів. Так, наприклад, для рівняння $x^2 + 6x + 5 = 0$ не можна сказати, що $x_1 + x_2 = -6$, $x_1x_2 = 5$, оскільки рівняння не має коренів ($D = 6^2 - 4 \cdot 5 < 0$).

Приклад 1. За яких значень параметра a добуток коренів рівняння $x^2 + (a - 2)x + a^2 + 2a = 0$ дорівнює 3?

Розв'язання. Якщо у квадратного рівняння існують корені x_1 та x_2 , то за теоремою Вієта, $x_1x_2 = a^2 + 2a$, а за умовою $x_1x_2 = 3$.

Маємо $a^2 + 2a = 3$; $a^2 + 2a - 3 = 0$; $a_1 = 1$, $a_2 = -3$. Але відповідь писати зарано! Треба перевірити існування коренів для кожного з випадків.

1) $a = 1$, тоді маємо рівняння $x^2 - x + 3 = 0$, яке коренів не має;

2) $a = -3$, тоді маємо рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$, дискримінант якого $D = 5^2 - 4 \cdot 3 > 0$, а тому рівняння має корені.

Відповідь: -3 .

Приклад 2. Для якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ приймає **найменше** значення?

Розв'язання. Нехай x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння. Нам необхідно знайти таке значення a , щоб значення виразу $x_1^2 + x_2^2$ приймало

2) $x_1 = 1, x_2 = \frac{a-1}{2}$. Тоді $1 - \frac{a-1}{2} = \frac{a-1}{2}; a = 2$.

Відповідь: $a = 2$.

Приклад 7. Для яких значень параметра a рівняння

$$x^2 - (|a+5| - |a-5|)x + (a-12)(a+12) = 0$$

має два різних від'ємних корені?

Розв'язання. Нехай x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння. За умовою $x_1 < 0, x_2 < 0, x_1 \neq x_2$.

Ці умови рівносильні таким:

$$\begin{cases} x_1 x_2 > 0, & \begin{cases} (a-12)(a+12) > 0, & (1) \\ |a+5| - |a-5| < 0, & (2) \end{cases} \\ x_1 + x_2 < 0, & \\ D > 0; & \begin{cases} D > 0. & (3) \end{cases} \end{cases}$$

Починаємо з нерівності (2): $|a+5| < |a-5|$. Піднесено до квадрата обидві частини нерівності, оскільки вони є невід'ємними числами і використаємо той факт, що $|x|^2 = x^2$. Маємо $(a+5)^2 < (a-5)^2$, звідки $a < 0$.

Розглянемо нерівність (1) системи. Оскільки $a < 0$, то $a - 12 < 0$, і тоді має виконуватися $a + 12 < 0$, тобто $a < -12$.

Тепер розглянемо нерівність (3).

$$D = (|a+5| - |a-5|)^2 - 4(a-12)(a+12) = a^2 + 10a + 25 - 2|a^2 - 25| + a^2 - 10a + 25 - 4(a^2 - 144) = -2a^2 + 626 - 2|a^2 - 25|.$$

Оскільки вже маємо $a < -12$, то $a^2 - 25 > 0$, а тому $|a^2 - 25| = a^2 - 25$.

Остаточного маємо:

$$D = -2a^2 + 626 - 2(a^2 - 25) = 676 - 4a^2 = 4(169 - a^2).$$

Залишилося розв'язати систему:

$$\begin{cases} 169 - a^2 > 0, & \begin{cases} a^2 - 169 < 0, \\ a \in (-13; -12). \end{cases} \\ a < -12; & \end{cases}$$

(розв'язування виконайте самостійно).

Відповідь: $a \in (-13; -12)$.

ВПРАВИ

1. За яких значень параметра a сума коренів рівняння

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a + 3$$

дорівнює 5?

2. За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$:

1) приймає найменше значення;

2) дорівнює 5?

3. За яких значень параметра a один із коренів рівняння

$$x^2 - ax + a + 4 = 0$$

утричі більший за другий?

4. За яких значень параметра a різниця коренів рівняння

$$x^2 - 2ax + 10 = 0$$

дорівнює 3?

5. За яких значень параметра a різниця коренів рівняння

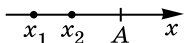
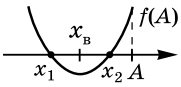
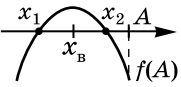
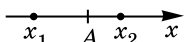
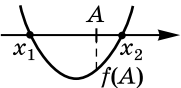
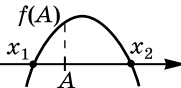
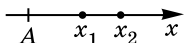
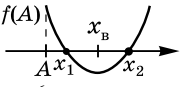
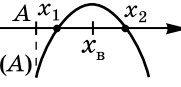
$$2x^2 - (a + 5)x + 2a + 2 = 0$$

дорівнює їхньому добутку?

Урок 15. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ (ТИП 2). РОЗТАШУВАННЯ КОРЕНІВ ВІДНОСНО ЧИСЛА

Упродовж цього уроку розглянемо квадратні рівняння з параметрами, пов'язані з розташуванням коренів відносно деякого числа.

Усі можливі випадки розташування коренів відносно деякого числа та необхідні й достатні умови для цього систематизовано в таблиці.

Розташування коренів $x_{1,2}$, $x_1 \leq x_2$, квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ відносно числа A			
Умова для коренів	$a > 0$	$a < 0$	Висновок
$x_1 < A, x_2 < A$ 	 $\begin{cases} x_B < A, \\ f(A) > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$	 $\begin{cases} x_B < A, \\ f(A) < 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_B < A, \\ af(A) > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$
$x_1 < A < x_2$ 	 $f(A) < 0$	 $f(A) > 0$	$af(A) < 0$
$x_1 > A, x_2 > A$ 	 $\begin{cases} x_B > A, \\ f(A) > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$	 $\begin{cases} x_B > A, \\ f(A) < 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_B > A, \\ af(A) > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$

Приклад 1. За яких значень параметра a рівняння

$$x^2 - (2a + 1)x + 3a - 4 = 0$$

має два корені, один з яких менший від 2, а другий більший за 2?

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x^2 - (2a + 1)x + 3a - 4$. Для знаходження всіх значень параметра a , що задовольняють умову задачі, достатньо, щоб $f(2) < 0$ (див. таблицю).

Маємо $f(2) = 2^2 - (2a + 1) \cdot 2 + 3a - 4 = -a - 2$. Тоді $-a - 2 < 0$; $a > -2$.

Відповідь: $a > -2$.

ВІДПОВІДІ

Урок 2

1. $\frac{a+5}{3}$ для всіх значень a . 2. $x = 3a$, $y = a$ для всіх значень a .
3. $x_1 = 2a$, $x_2 = 3a - 1$ для всіх значень a .

Урок 3

1. Якщо $a = 0$, рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{7}{a}$.
2. Якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 0$. 3. Якщо $a = 2$, то x – будь-яке число; якщо $a = -2$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 2$, $a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. 4. Якщо $a = 3$, то x – будь-яке число; якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, $a \neq 3$, то $x = \frac{a+3}{a}$.

Урок 4

1. $-0,25$. 2. -2 . 3. 3 . 4. $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2)$.

Урок 5

1. Якщо $a = -3$, то y – будь-яке число; $x = 2 + y$; якщо $a \neq -3$, то $x = 2$; $y = 0$. 2. Якщо $a = -2$, то система не має розв'язків; якщо $a \neq -2$, то $x = \frac{8a+12}{3(a+2)}$; $y = \frac{2}{2+a}$. 3. Якщо $a = 1$, то y – будь-яке число; $x = 2 - y$; якщо $a = -1$, то система не має розв'язків; якщо $a \neq 1$, $a \neq -1$, то $x = \frac{2a}{a+1}$, $y = \frac{2}{a+1}$.

Урок 6

1. 1) $a \neq 6$; 2) $a = 6$. 2. 1) $a = 2$; 2) $a = -2$. 3. $a \geq \frac{44}{3}$. 4. $a \geq \frac{4}{3}$.

Урок 7

1. Якщо $a < 0$, то $x \geq \frac{4}{a}$; якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x \leq \frac{4}{a}$. 2. Якщо $a < -3$, то $x > a - 3$; якщо $a = -3$, то нерівність не має розв'язків; якщо $a > -3$, то $x < a - 3$. 3. Якщо $a = -3$, то x – будь-яке число; якщо $a = 0$, то нерівність не має розв'язків; якщо $a < -3$ або $a > 0$, то $x > \frac{1}{a+3}$; якщо $-3 < a < 0$, то $x < \frac{1}{a+3}$.

ЗМІСТ

Передмова	3
Урок 1. Вступ. Основні типи і види задач	4
Урок 2. «Пасивний» параметр	5
Урок 3. Лінійні рівняння з параметрами (тип 1)	7
Урок 4. Лінійні рівняння з параметрами (тип 2)	9
Урок 5. Системи лінійних рівнянь з параметрами (тип 1)	10
Урок 6. Система лінійних рівнянь з параметрами (тип 2)	12
Урок 7. Лінійні нерівності з параметрами (тип 1).	15
Урок 8. Лінійні нерівності з параметрами (тип 2).	17
Урок 9. Системи лінійних нерівностей з параметрами (тип 1)	19
Урок 10. Системи лінійних нерівностей з параметрами (тип 2)	21
Урок 11. Квадратні рівняння з параметрами (тип 1).	24
Урок 12. Квадратні рівняння з параметрами (тип 2). Корені рівняння	26
Урок 13. Квадратні рівняння з параметрами (тип 2). Дискримінант.	29
Урок 14. Квадратні рівняння з параметрами (тип 2). Теорема Вієта	31
Урок 15. Квадратні рівняння з параметрами (тип 2). Розташування коренів відносно числа	36
Урок 16. Квадратні рівняння з параметрами (тип 2). Розташування коренів відносно проміжка	40
Урок 17. Дробові раціональні рівняння з параметрами (тип 1).	43
Урок 18. Дробові раціональні рівняння з параметрами (тип 2).	47
Урок 19. Квадратні нерівності з параметрами (тип 1)	50
Урок 20. Квадратні нерівності з параметрами (тип 2)	54
Урок 21. Дробові раціональні нерівності з параметрами (тип 1).	58
Урок 22. Дробові раціональні нерівності з параметрами (тип 2).	64
Урок 23. Рівняння з модулями, що містять параметр (тип 1)	68
Урок 24. Рівняння з модулями, що містять параметр (тип 2)	77
Урок 25. Нерівності з модулями, що містять параметр (тип 1).	85
Урок 26. Нерівності з модулями, що містять параметр (тип 2).	91
Урок 27. Рівняння вищих степенів з параметром (тип 1).	95
Урок 28. Рівняння вищих степенів з параметром (тип 2).	100
Відповіді	105